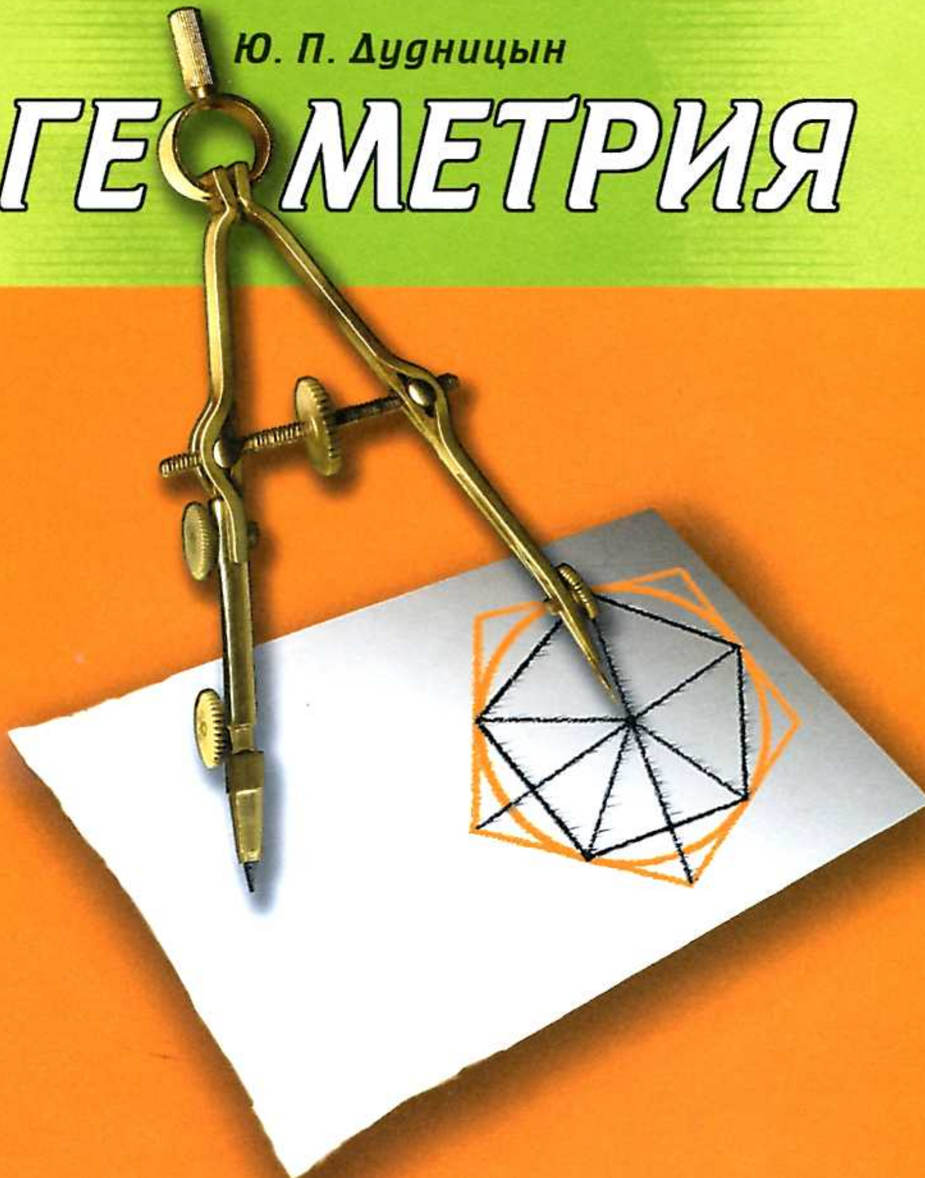
Ю. П. Дудницын

ГЕОМЕТРИЯ



9

Рабочая тетрадь

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Ю. П. Дудницын

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

9 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

8-е издание

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2012

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Д81

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» А. В. Погорелова и предназначена для организации самостоятельной работы учащихся, направленной на усвоение ими основных теоретических фактов и практических умений в процессе решения задач.

Условные обозначения:

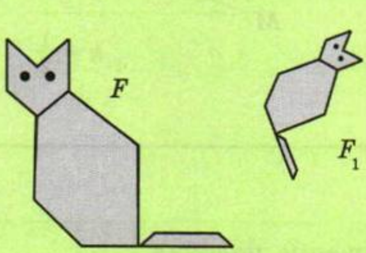
3	— упражнение, обязательное для всех учащихся
О	— определение
А	— аксиома
$\mathbf{T}_\text{с}$	— теорема, выражающая свойство фигуры
$\mathbf{T}_\text{п}$	— теорема, выражающая признак фигуры
Радиан	— новый термин
	— необходимый справочный материал

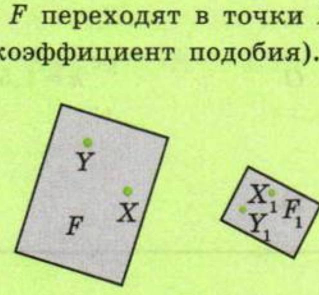
ISBN 978-5-09-028663-3

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур

§ 11 Подобие фигур

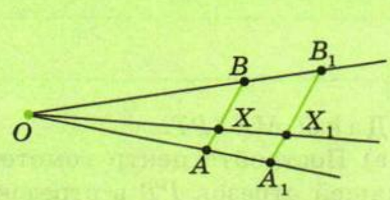
О **Преобразование подобия** — это преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз.
Если любые точки X и Y фигуры F переходят в точки X_1, Y_1 фигуры F_1, то $X_1Y_1 = k \cdot XY$ (k — коэффициент подобия).





$X_1Y_1 = kXY$ $\quad F \backsim F_1$

О **Гомотетия с центром** O — это преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X_1, такую, что X_1 лежит на луче OX и $OX_1 = k \cdot OX$ ($k > 0$).

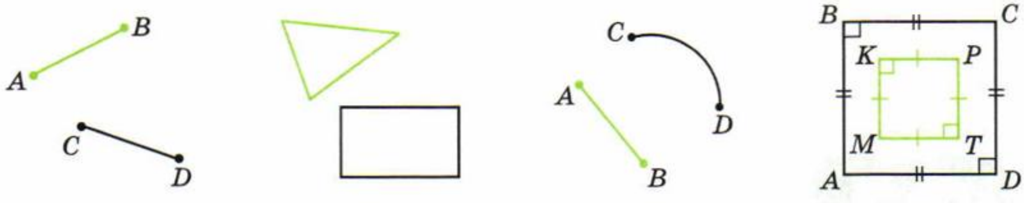


$OX_1 = kOX$

1

На каком из рисунков изображены подобные фигуры?

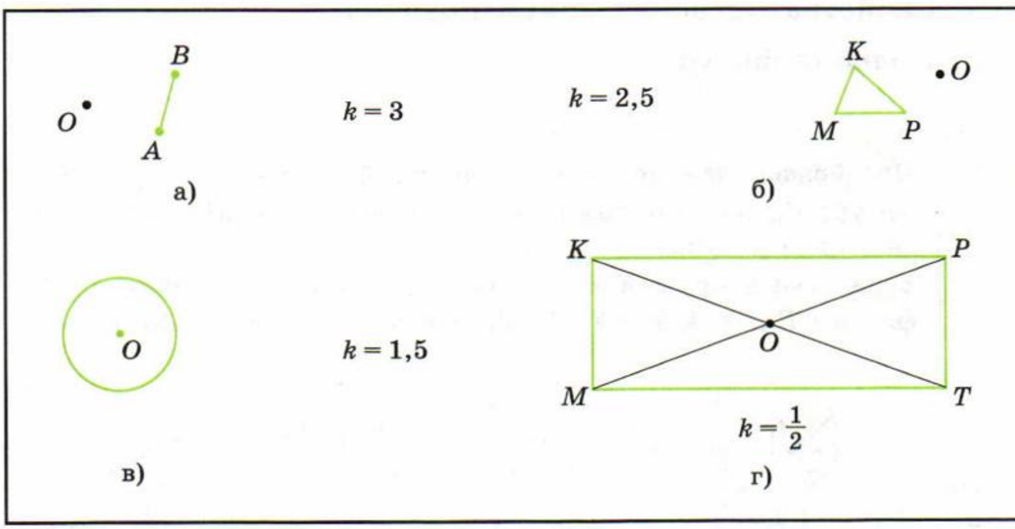
Ответ. ....



а) б) в) г)

2

Постройте фигуру, гомотетичную данной (O — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии).



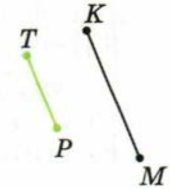
$\mathrm{T_C}$ | Гомотетия есть преобразование подобия.

3

Дано: $MK \parallel PT$.

а) Постройте центр гомотетии, переводящей отрезок PT в отрезок MK.

б) Вычислите коэффициент k, если $PT = 3$ см, $MK = 9$ см.



Ответ. б) ....

4

Начертите треугольник ABC, отметьте точки A_1 и C_1 — середины сторон AB и BC. Укажите центр и коэффициент гомотетии, при которой:

а) треугольник BA_1C_1 переходит в треугольник BAC;

б) треугольник ABC переходит в треугольник A_1BC_1.

Ответ.

а) ....

б) ....

$\mathbf{Т}_{\text{С}}$ | **Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.**

$\mathbf{Т}_{\text{С}}$ | **Преобразование подобия сохраняет углы между прямыми.**

5

Какой фигурой является фигура, подобная: а) отрезку; б) лучу; в) квадрату; г) углу? (Решите задачу устно.)

Ответ. а) ....; б) ....; в) ....; г) ....

6

Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = 35°$, $\angle B = 80°$.

Найдите величины углов треугольника $A_1B_1C_1$. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

7

Для каких из перечисленных пар фигур не существует преобразования подобия, переводящего одну фигуру в другую:

а) два отрезка;

б) дуга и отрезок;

в) два угла, градусные меры которых различны;

г) две окружности;

д) два разносторонних треугольника?

(Решите задачу устно.)

Ответ. ....

Т$_С$ | **У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.**

8

Многоугольники F и F_1 подобны. Меньший и больший углы многоугольника F равны 50° и 190°. Меньшая и большая его стороны равны 8 см и 12 см. Меньшая сторона многоугольника F_1 равна 20 см. Найдите величины меньшего и большего углов и большей стороны многоугольника F_1. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

9

Меньшие стороны прямоугольного треугольника F равны 6 см и 8 см. Большая сторона подобного ему треугольника F_1 равна 40 см. Вычислите длины двух меньших сторон треугольника F_1.

Решение. Вычислим длину гипотенузы прямоугольного треугольника F: .... Треугольник F_1, подобный данному, ... (по свойству ....). Большей его стороной является гипотенуза, она равна .... (по ....). Найдем отношение соответствующих сторон подобных треугольников. Оно равно 40: .... = ... Значит, коэффициент подобия $k=$ .... Теперь можно найти длины катетов треугольника F_1. Обозначим катеты данного и подобного ему треугольников a, b, a_1, b_1. Тогда $a_1=$ .... , $b_1=$ .... Следовательно, $a_1=$ ...., $b_1=$ ....

Ответ. ....

10

Дано: $\triangle MKP \sim \triangle M_1K_1P_1$, $\angle M=90°$, $\angle K=30°$, $MP=12$ см, $K_1P_1=8$ см.

Вычислите:

а) коэффициент подобия k;

б) длину меньшей стороны треугольника $M_1K_1P_1$.

Решение.

а) Найдем длину большей стороны треугольника MKP (его гипотенузы):

.... И теперь вычислим коэффициент подобия k (он равен отношению соответствующих сторон треугольников $M_1K_1P_1$ и MKP), $k = \frac{K_1P_1}{KP} = $ ....

б) Вычислим длину меньшей стороны .... треугольника $M_1K_1P_1$:

$M_1P_1 =$ ....

Ответ. а) ....; б) ....

11

Квадрат $ABCD$ получен преобразованием подобия квадрата $MKPT$. Известно, что $MK = 6$ см, а диагональ AC квадрата $ABCD$ в 5 раз больше диагонали MP. Вычислите длины сторон и периметр квадрата $ABCD$. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

12

Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $k = 4$, $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $AC = 18$ см. Вычислите длины сторон и периметр треугольника $A_1B_1C_1$. (Решите задачу устно.)

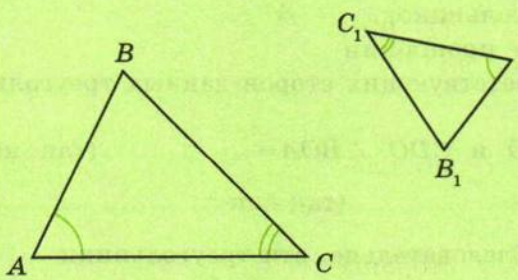
Ответ. ....

103. Признак подобия треугольников по двум углам

104. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

105. Признак подобия треугольников по трем сторонам

Т$_С$ Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

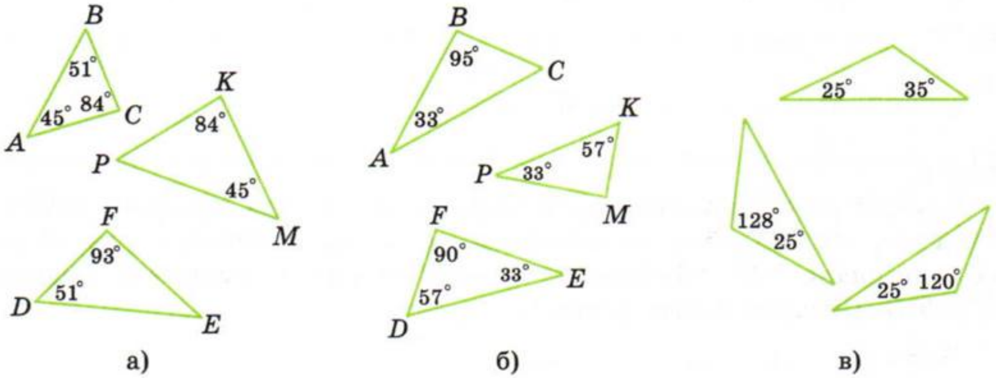


Если $\angle A = \angle A_1$,
$\angle C = \angle C_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

13

Найдите на рисунках подобные треугольники. Запишите их подобие с помощью соответствующего символа.

Ответ. а) ....; б) ....; в) ....



14

Дано: $\triangle MKP \sim \triangle ABC$.

а) Запишите пары соответствующих сторон этих треугольников.

б) Составьте три верные пропорции, содержащие отношения соответствующих сторон данных треугольников.

Ответ.

а) MK и ...., KP и ...., ... и AC;

б) MK : ...... $= KP$: ......, KP : ...... $= MP$: ......, MP : ...... $= MK$: ......

15

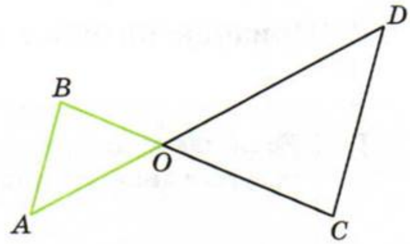
Дано: $AB \parallel CD$.

а) Докажите подобие треугольников ABO и CDO.

б) Запишите, что эти треугольники подобны.

в) Найдите и запишите пары соответствующих сторон этих треугольников.

г) Составьте две верные пропорции с помощью отношений соответствующих сторон данных треугольников.



Решение.

а) В треугольниках ABO и CDO $\angle BOA =$ .... (так как они ....), $\angle ABO =$ .... (так как ....). Следовательно, эти треугольники .... (по ....).

б) $\triangle ABO \sim \triangle$ ....

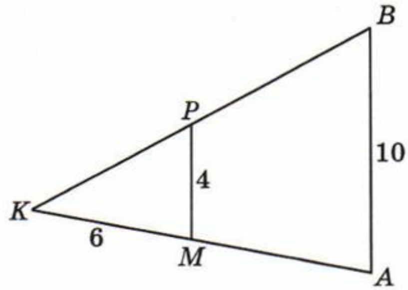
в) Соответствующие стороны: AB и ...., AO и ...., ... и ....

г) AB : .... $= BO$: ...., AO : .... = ... : CD.

16

Дано: $MP \parallel AB$, $MP = 4$ см, $AB = 10$ см, $KM = 6$ см.

Вычислите длину KA.



Решение. Рассмотрим треугольники KMP и KAB. Угол K — ...., $\angle KMP = \angle$ .... (как .... при параллельных прямых .... и секущей ....). Следовательно, эти треугольники ....

Запишем этот факт: $\triangle MKP \sim \triangle$ ....

Теперь составим нужную нам пропорцию: KM : .... $= MP$: ....

Подставим величины данных отрезков ....

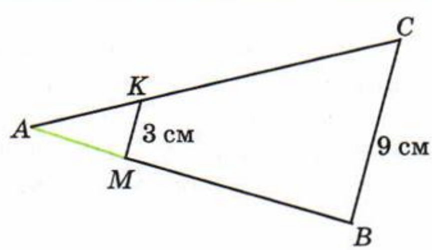
и найдем из пропорции длину отрезка KA: $KA =$ ....

Ответ. ....

17

Дано: $KM \parallel BC$, $KM = 3$ см, $BC = 9$ см, $AB = 15$ см.

Найдите длину отрезка AM.



Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

18

Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите длину боковой стороны CD, если основания трапеции $AD=20$ см, $BC=5$ см и отрезок $DK=16$ см.

Решение. Рассмотрим треугольники BCK и AKD. ....

Ответ. ....

19

Точка O пересечения диагоналей трапеции $DCME$ делит одну из них на отрезки $DO=9$ см и $OM=6$ см. Большее основание трапеции DE равно 12 см. Вычислите длину меньшего основания трапеции.

Решение. ....

....

....

Ответ. ....

20

Начертите параллельные прямые a и b. Отметьте точку A, расположенную между ними. Постройте с помощью линейки два подобных треугольника с общей вершиной A. Докажите, что эти треугольники подобны.

Доказательство. ....

....

....

....

....

....

....

21

В треугольниках ABC и DFE $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle D$, $BC = 3$ см, $EF = 28$ см, $ED = 21$ см. Найдите длину стороны AC.

Решение. Данные треугольники .... (по ....

....). Запишем это с помощью соответствующего символа: $\triangle ABC$ .... $\triangle$ .... Теперь составим нужную пропорцию: AC : .... $= BC$: .... Находим длину отрезка AC:

....

Ответ. ....

22

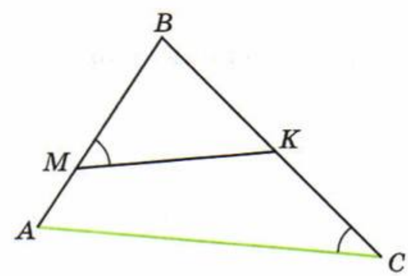
В треугольниках THP и FDE $\angle T = \angle F$, $\angle P = \angle E$, $TP = 6$ см, $FE = 18$ см, $FD = 12$ см. Вычислите длину стороны TH.

Решение. ...

Ответ. ...

23

Дано: $\angle BMK = \angle BCA$, $AB = 15$ см, $BK = 10$ см, $MK = 12$ см.
Вычислите длину стороны AC.

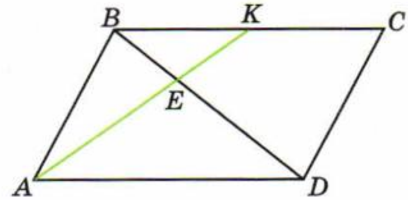


Решение. ...

Ответ. ...

24

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, K — середина стороны BC, $AE = 12$ см.
Вычислите длину отрезка AK.



Решение. Рассмотрим треугольники BKE и ADE. В этих треугольниках $\angle BEK = \angle$ .... (по свойству ....),

$\angle BKE = \angle$ .... (как ....). Следовательно, ...

Составим пропорцию: $AE :$ .... $= AD :$ .... Но отношение $AD : BK = \frac{1}{2}$ (так как точка K является ....). Поэтому $AE : KE = \frac{1}{2}$. Теперь найдем длину отрезка KE: $KE =$ ....

....

Следовательно, $AK =$ ....

Ответ. ....

25

Дано: $MKPT$ — трапеция, $\angle MKP = \angle MPT$, $MT = 9$ см, $KP = 4$ см.

Вычислите длину диагонали MP.

Решение. Рассмотрим треугольники MKP и MPT. Они .... (так как ....).

Запишем это: ....

Составим нужную пропорцию: $KP :$ .... $= MP :$ .... Подставим данные величины: .... — и найдем длину искомой диагонали.

$MP^2 =$ .... , $MP =$ ....

Ответ. ....

26

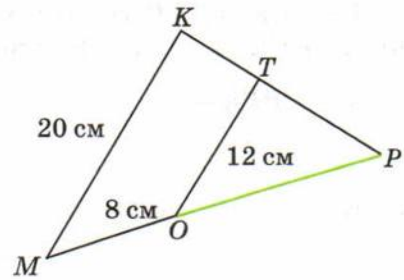
Дано: $TO \parallel MK$, $MK = 20$ см, $TO = 12$ см, $OM = 8$ см.

Вычислите длину отрезка OP.

Решение. Пусть $OP = x$ см. Тогда MP будет равно .... см. $\triangle MKP \sim \triangle$ .... (так как ....). Составляем пропорцию: ....

Подставляем соответствующие величины: .... Решаем полученное уравнение: .... , $x=$ ....

Значит, $OP=$ .... см.



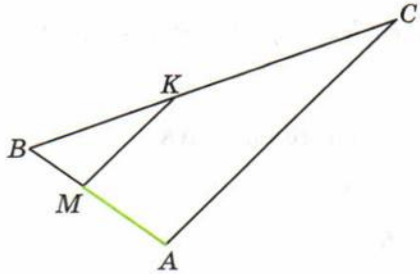
Ответ. ....

27

Дано: $MK \parallel AC$, $AB = 5$ см, $MK = 4$ см, $AC = 12$ см.

Вычислите длину отрезка AM.

Решение. Пусть $AM = x$ см, тогда $MB=$ .... Рассмотрим треугольники ....



Они ....

....

....

Составим пропорцию и решим соответствующее уравнение: ....

....

.... Получим $x=$ ...., $AM=$ ....

Ответ. ....

$T_п$ Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

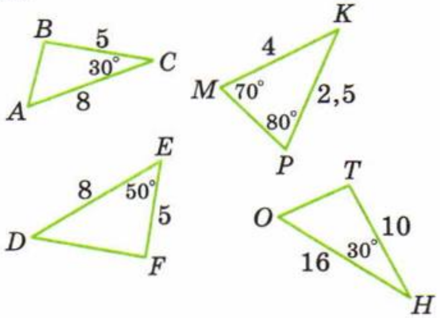
Если $\angle A = \angle A_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

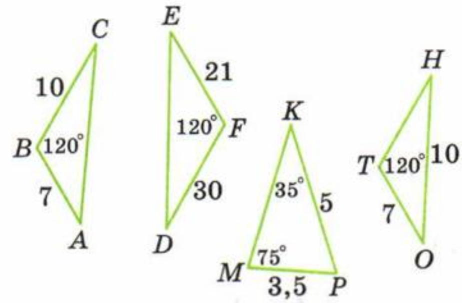
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

28

Найдите на рисунках все пары подобных треугольников. Запишите их.



а)



б)

Ответ. а) ....

б) ....

29

Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB=4$ см, $BC=5$ см, $AC=7$ см, $A_1B_1=12$ см, $B_1C_1=15$ см. Углы B и B_1 равны. Найдите длину стороны A_1C_1.

Решение. Данные треугольники имеют равные углы: ....

(по ....). Вычислим отношения двух данных пар сторон этих треугольников: $AB:A_1B_1=4:12=\frac{1}{3}$, $BC:B_1C_1=$........................=......

Значит, $AB:$............$=BC:$............. Следовательно, стороны, образующие равные углы B и B_1, пропорциональны. Делаем вывод, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Поэтому $AC:A_1C_1=\frac{1}{3}$. Подставим значение AC и вычислим длину стороны A_1C_1. $7:A_1C_1=1:3$, $A_1C_1=$................=...........

Ответ. $A_1C_1=$.............

30

Даны треугольники MKP и $M_1K_1P_1$. $MK=7$ см, $KP=8$ см, $MP=10$ см, $M_1K_1=14$ см, $M_1P_1=20$ см, $\angle M=\angle M_1$. Найдите длину стороны K_1P_1 и периметр треугольника $M_1K_1P_1$.

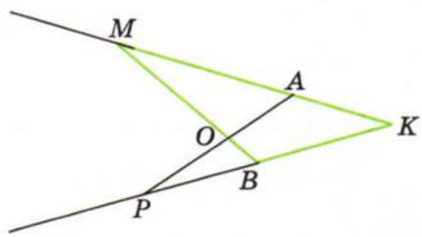
Решение. ....

....

Ответ. ……………………………………

31

Дано: $MA = 14$ см, $AK = 6$ см,
$PB = 7$ см, $KB = 8$ см.



а) Докажите подобие треугольников MKB и AKP.

б) Найдите на рисунке еще одну пару подобных треугольников и докажите их подобие.

Доказательство.

а) Рассмотрим треугольники MKB и AKP, имеющие общий угол …. Докажем пропорциональность сторон, образующих этот угол. Вычислим длины сторон MK и PK. $MK =$ ……………………………… ; $PK =$ ……………………………… . Вычислим отношения соответственных сторон треугольников: $MK : KP =$ …………… $=$ ……… , $KB : KA =$ ……… $=$ ……… . Следовательно, $MK : KP =$ …………… , т. е. эти стороны ……………………………… . Следовательно, треугольники подобны, т. е. $\triangle MKB \sim \triangle$ …………

б) Рассмотрим треугольники ………… и ………… . Они имеют два равных угла: $\angle MOA = \angle$ ………… (так как они ……………………), $\angle AMO = \angle$ ………… (это соответственные углы в подобных треугольниках ………… и …………). Следовательно, $\triangle MAO \sim \triangle$ …………

32

Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 12$ см, $A_1C_1 = 6$ см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. ....

....

....

....

....

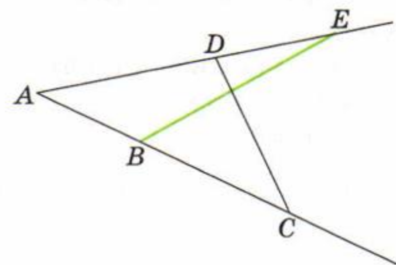
....

....

....

Ответ. ....

33



На одной стороне угла A отмечены последовательно точки D и E, а на другой — точки B и C, причем $AD = 10$ см, $DE = 5$ см, $AB = 2$ см, $AC = 75$ см, $CD = 70$ см. Вычислите расстояние между точками B и E.

Решение. Рассмотрим треугольники ABE и ADC. Докажем, что они подобны. ....

....

....

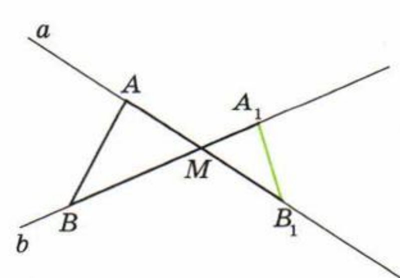
Отсюда следует, что $BE:DC = AB:$....... . Но $AB:AD =$..................

Следовательно, $BE:DC =$.............. . Находим BE. $BE =$........................

....

Ответ. ....

34



Прямые a и b пересекаются в точке M. $MA = 6$ см, $MB = 12$ см, $AB = 15$ см, $MA_1 = 4$ см, $MB_1 = 8$ см. Вычислите длину стороны A_1B_1 и периметр треугольника MA_1B_1.

Решение. ....

....

....

....

....

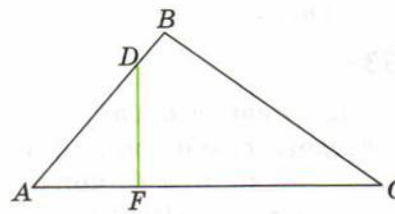
....

....

....

Ответ. ....

35



Дано: $AB = 30$ см, $AD = 25$ см,
$AC = 50$ см, $AF = 15$ см.

а) Подобны ли треугольники ABC и ADF?

б) Вычислите длину отрезка DF, если $BC = 40$ см.

Решение.

а) ....

....

....

б) ....

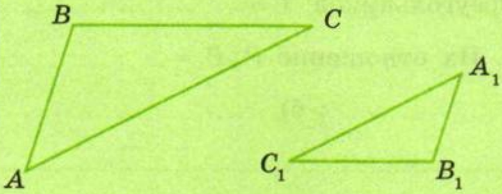
....

Ответ. а) .... ; б) ....

36

Начертите угол. Постройте с помощью циркуля и линейки (без делений) два подобных треугольника, вершины которых лежат на сторонах этого угла.

Т$_п$ Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

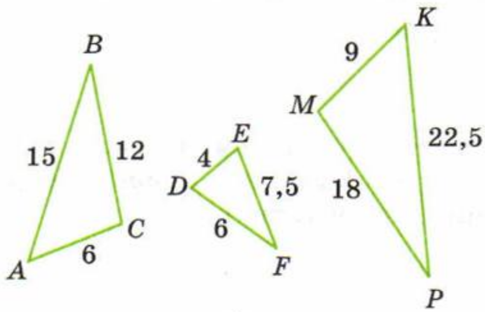


Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

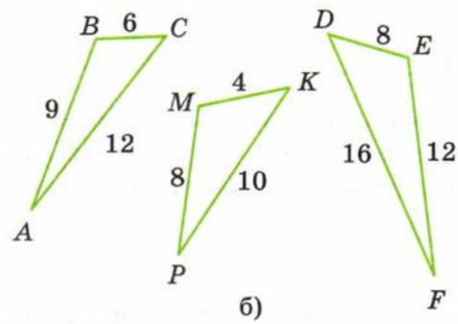
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

37

Найдите на рисунках подобные треугольники. Запишите их.



а)



б)

Ответ. а) .... ; б) ....

38

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $BC = a$, $AC = b$, $BA = c$, $A_1C_1 = 3b$, $B_1C_1 = 3a$, $A_1B_1 = 3c$. Найдите величины углов треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle A = 75°$, $\angle B = 55°$. (Решите задачу устно.)

Ответ. $\angle A_1 =$ .... , $\angle B_1 =$ .... , $\angle C_1 =$ ....

39

Стороны двух треугольников равны соответственно 8 см, 10 см, 12 см и 1,6 см, 2 см и 2,4 см.

а) Подобны ли эти треугольники?

б) Вычислите отношение периметров этих треугольников.

Решение.

а) Вычислим отношения трех пар соответственных сторон данных треугольников: $8 : 1{,}6 =$ .... , $10 : 2 =$ .... , $12 :$ .... $=$ .... Эти отношения .... Значит, стороны данных треугольников .... Следовательно, треугольники ....

б) Вычислим периметры треугольников: $P =$ .... ,
$P_1 =$ .... Их отношение $P : P_1 =$ ....

Ответ. а) .... ; б) ....

40

Стороны двух треугольников равны соответственно 3,5 см, 4,5 см, 5,5 см и 7 см, 9 см, 11 см.

а) Подобны ли эти треугольники?

б) Вычислите отношение их периметров.

(Решите задачу устно.)

Ответ. а) .... ; б) ....

41

Стороны данного треугольника равны 7 см, 5 см и 6 см. Меньшая сторона подобного ему треугольника равна 2,5 см. Вычислите длины сторон и периметр второго треугольника. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

Т$_С$ Отношение периметров подобных треугольников равно отношению соответственных сторон этих треугольников.

Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,

то $P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

42

Стороны треугольника ABC равны 18 см, 25 см и 17 см. Периметр подобного ему треугольника равен 15 см. Вычислите длины сторон второго треугольника.

Решение.

Вычислим периметр треугольника ABC: $P_{ABC} =$ ....

Найдем отношение периметров: $P_{ABC} : P_1 =$ .... : 15 см = ... Следовательно, и отношение соответственных сторон треугольников равно .... . Поэтому $AB : A_1B_1 =$ .... , отсюда $A_1B_1 =$ .... =

= .... Аналогичным образом вычисляем остальные стороны второго треугольника: ....

....

Ответ. ....

43

Стороны треугольника ABC равны 5 см, 6 см и 7 см. Периметр подобного ему треугольника равен 27 см. Вычислите длины сторон второго треугольника.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

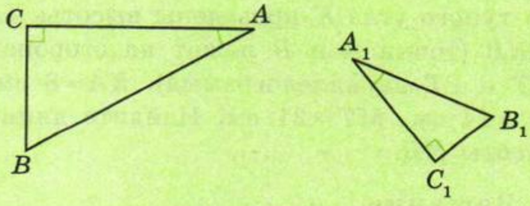
Ответ. ....

106. Подобие прямоугольных треугольников

Тп Для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по одному равному острому углу.

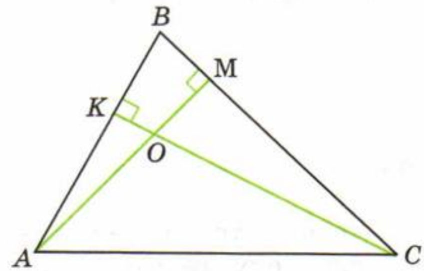
Если $\angle A = \angle A_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Если $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



Тп Для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы их катеты были пропорциональны.

44

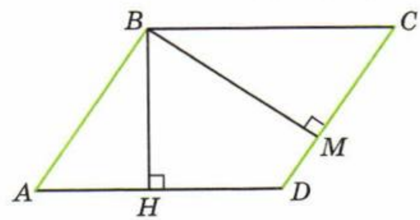


Дан треугольник ABC. AM и CK — его высоты. Найдите на рисунке две пары подобных треугольников. Запишите с помощью соответствующего символа, что эти треугольники подобны.

Ответ. ....

....

45



В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BH и BM (точки H и M расположены на сторонах AD и CD параллелограмма). $BC=15$ см, $BH=6$ см, $BM=9$ см. Вычислите длину стороны CD.

Решение. Рассмотрим треугольники BAH и BMC. $\angle BHA=\angle$............... $=$....... (по ....), $\angle A=$ $=\angle$....... (по свойству ....). Следовательно, треугольники .... , т. е. $\triangle ABH \sim \triangle$............. . Составим пропорцию: $BC:AB=$................. . Подставим длины данных отрезков и найдем длину AB: ....

Но $CD=$........ $=$.............. (по свойству ....).

Ответ. ....

46

В параллелограмме $MKPT$ из вершины тупого угла K проведены высоты KA и KB (точки A и B лежат на сторонах MT и PT параллелограмма). $KA=8$ см, $PT=14$ см, $MT=21$ см. Найдите длину высоты KB.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

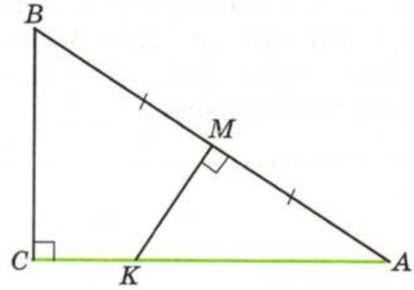
47

Дано: $\angle BCA = \angle KMA = 90°$, $BC = 24$ см, $CA = 32$ см, $BM = AM$.

Найдите длины отрезков CK и KA.

Решение. Вычислим длину гипотенузы AB: ....

.... Значит, $MA =$..................



Рассмотрим треугольники ABC и AMK. Они .... и имеют .... угол A. Следовательно, они подобны, т. е. $\triangle ABC \sim \triangle$.........

Составим нужную пропорцию: $AB : AK = CA :$.............. . Подставим данные величины в эту пропорцию и найдем из нее длину отрезка AK:

...., $AK =$.............. . Тогда

$CK =$..

Ответ. ....

48

В прямоугольном треугольнике CDE из точки A, лежащей на гипотенузе CD, проведен перпендикуляр AB к катету CE. Вычислите длины катетов CE и DE, если $AB = 16$ см, $CB = 18$ см, $BE = 9$ см.

Решение. ....

....

....

Ответ.

49

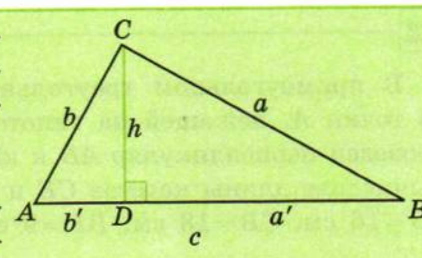
В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 12$ см. Из точки K катета BC проведен перпендикуляр KM к гипотенузе AB. $BK = 10$ см, $MB = 8$ см. Вычислите длины гипотенузы AB и катета BC данного треугольника.

Решение.

Ответ.

Tc Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Tc Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.



$$b^2 = c \cdot b', \quad a^2 = c \cdot a'$$
$$h^2 = b' \cdot a'$$

50

Высота CK, проведенная из вершины прямого угла C треугольника ABC, делит гипотенузу на отрезки $AK=4$ см и $KB=9$ см. Вычислите длины катетов этого треугольника.

Решение. Длина гипотенузы AB равна .... Проекцией катета CA на гипотенузу является отрезок AK. Значит, $AC^2=$.................. .... = ... (по свойству ....). Поэтому $AC=$..................... . Аналогичным образом найдем второй катет CB. Его проекцией на гипотенузу является отрезок BK. Следовательно, $CB^2=$.......................... = ... , тогда $CB=$ = ...

Попробуйте найти длину катета CB другим способом (пользуясь теоремой ....): $CB^2=AB^2-$.. .... , $CB=$ ....

Ответ. ....

51

Вычислите длины катетов прямоугольного треугольника, если их проекции на гипотенузу равны 9 см и 16 см.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

52

В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 25 см, катет BC равен 20 см. Вычислите длины проекций катетов на гипотенузу.

Решение. Проведем высоту CK данного треугольника. Проекцией катета BC на гипотенузу является отрезок ....

Следовательно, $BC^2 =$ ...., ... $=$ $=$......... и $BK =$ ....$=$ $=$................. Теперь найдем проекцию катета CA на гипотенузу: $AK =$ ....

....

Ответ. ....

53

Катеты MP и PK прямоугольного треугольника MPK равны соответственно 24 см и 10 см. Вычислите длины их проекций на гипотенузу.

Решение. Найдем длину гипотенузы MK. $MK^2 =$ ....$=$ ....$=$ $=$ .... (по теореме ....),

$MK =$ ....

Проведем высоту PH. Проекция катета MP на гипотенузу — отрезок ...., проекция катета PK — отрезок ....

Следовательно, $MP^2 =$ ....$=$ .... , откуда $MH =$ ...

Далее находим длину отрезка KH: ...

Ответ. ...

54

Проекция катетов на гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC равна 12 см и 3 см. Вычислите длины высоты, проведенной из вершины прямого угла, и катетов.

Решение. Проведем высоту CK. Пусть $AC = 12$ см, тогда $BK = 3$ см. Следовательно, $CK^2 =$ ... $=$ ... $=$ ... , $CK =$ ... . Катеты найдем, пользуясь теоремой ...

...

...

Ответ. ...

55

Вычислите периметры треугольников, на которые прямоугольный треугольник ABC делится высотой, проведенной из вершины прямого угла C, если проекции катетов BC и AC на гипотенузу равны соответственно 36 см и 64 см.

Решение. ...

...

...

...

...

...

...

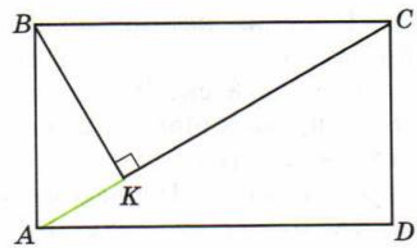
...

....

....

Ответ. ....

56



Одна из сторон прямоугольника $ABCD$ равна 10 см. Ее проекция на диагональ этого прямоугольника равна 8 см.

Вычислите:

а) длину проекции другой стороны прямоугольника на эту диагональ;

б) периметр прямоугольника.

Решение. Проведем диагональ AC и перпендикуляр из точки B на эту диагональ. Пусть $BC = 10$ см, тогда ее проекция на диагональ AC — это отрезок .... , он равен 8 см.

а) Рассмотрим треугольник ABC, он прямоугольный. Следовательно, $BC^2 = AC \cdot$ .... Найдем из данного равенства длину диагонали AC:

.... Затем найдем длину проекции стороны AB на диагональ AC: ....

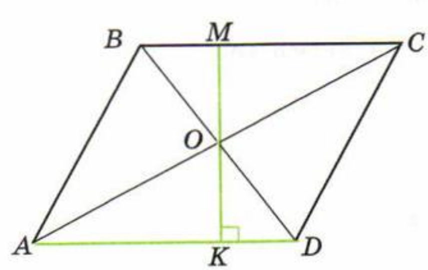
б) Найдем из треугольника ABC длину стороны AB: ....

.... Следовательно,

периметр прямоугольника $ABCD$ равен ....

Ответ. ....

57



Диагонали ромба $ABCD$ равны 16 см и 12 см. Вычислите:

а) длины отрезков, на которые делит сторону ромба перпендикуляр, проведенный через точку пересечения диагоналей к стороне ромба;

б) высоту ромба.

Решение.

а) Проведем через точку O перпендикуляр к стороне AD и рассмотрим треугольник AOD. Вычислим длину AD (по теореме ....):

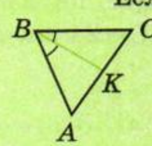
$AD^2 =$ .... = ... = ... , $AD =$ .... Запишем ра-

венство $OA^2 = AD \cdot$ .... (по ....). Отсюда найдем длину AK: $AK =$ .... Значит, $KD =$
$=$ ....

б) Высотой ромба является отрезок KM. $KM = 2 \cdot$ .... Найдем KO.
$KO^2 =$ .... (по свойству ....). Поэтому $KO =$ .... и
$KM =$ ....

Ответ. ....

Т$_С$ Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.



Если BK — биссектриса, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$ или $\frac{AK}{AB} = \frac{KC}{BC}$

58

В треугольнике ABC $AB = 18$ см, $BC = 24$ см, BM — биссектриса треугольника. Вычислите отношение отрезков, на которые делит эта биссектриса сторону AC.

Решение. $CM : MA =$ .... $=$
$=$ .... $=$ .... (по свойству
....).

Ответ.

....

59

В треугольнике MKP $MK = 12$ см, $KP = 22$ см. Биссектриса MC делит сторону KP на две части, $KC = 8$ см. Вычислите длину стороны MP.

Решение. Найдем длину отрезка CP: $CP =$ ....
Теперь составим пропорцию: $KC : CP =$ .... Подставим

в нее данные и найденные величины

.... , откуда найдем MP:

....

....

....

....

Ответ. ....

60

Отрезок DO — биссектриса треугольника DBC. Вычислите периметр этого треугольника, если $BC = 24$ см, $DB = 15$ см и $OC = 14$ см.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

61

В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Вычислите длину стороны BC, если $AB = 16$ см и $AD : DC = 8 : 5$.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

62

В треугольнике MKP проведена биссектриса KO, $MK = 12$ см, $MP = 30$ см, $KP = 24$ см. На какие части делит биссектриса KO сторону MP?

Решение. Пусть длина отрезка $OP = x$ см, тогда $OM =$ .... см. Составим пропорцию: $MO : OP = MK : KP$. Подставим в нее длины соответствующих отрезков: .... : ...... $= 12 : 24$.

Решим это уравнение: ....

.... Получим $x =$ .... Значит, $OP =$ ...... см, а $OM =$ ...... см.

Ответ. ....

63

Стороны треугольника ABC равны 10 см, 15 см и 20 см. В треугольнике проведена биссектриса большего угла. Вычислите длины отрезков, на которые эта биссектриса делит противоположную сторону данного треугольника.

Решение. ....

....

....

....

....

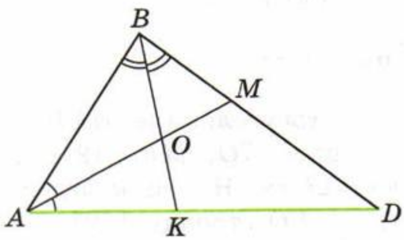
....

....

....

Ответ. ....

64



Дано: AM, BK — биссектрисы треугольника ABD. $AB=8$ см, $AD=12$ см, $BD=10$ см. Вычислите:

а) длины отрезков AK и KD;

б) отношение длин отрезков, на которые делится биссектриса BK биссектрисой AM.

Решение.

а) ....

....

....

Значит, $AK=$ .... , $KD=$ ....

б) Рассмотрим треугольник ABK. AO — биссектриса его угла BAK. Следовательно, $BO:OK=$ ....= ....

Ответ. а) .... ; б) ....

65

Стороны BC и BA треугольника ABC равны соответственно 9 см и 6 см. Биссектриса BM делит сторону AC на два отрезка, один из которых равен одной из данных сторон треугольника. Найдите длину стороны AC.

Решение. Пусть отрезок $CM=6$ см. Тогда можем вычислить длину MA:

....

....

$MA=$ .... и $AC=$ ....

Рассмотрим другой случай. Пусть $CM=9$ см. Вычислим длину MA:

....

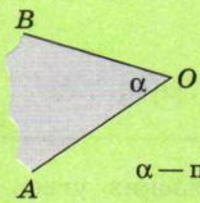
$MA =$ .... и $AC =$ .... Но этого быть не может, так как ....

....

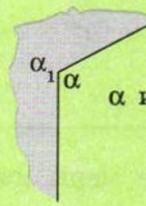
Ответ. ....

107. Углы, вписанные в окружность

О **Плоский угол** — это одна из частей плоскости, на которые разбивает ее угол.



α — плоский угол



α и α_1 — дополнительные плоские углы

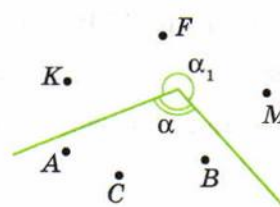
О **Дополнительные плоские углы** — это плоские углы с общими сторонами.

66

Перечислите все точки, которые принадлежат:

а) плоскому углу α;

б) плоскому углу α_1.

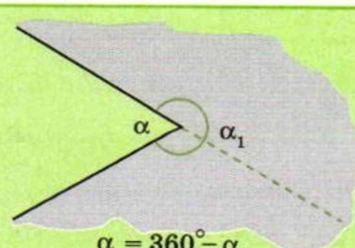


Ответ.

а) углу α принадлежат точки ....

б) плоскому углу α_1 принадлежат точки ....

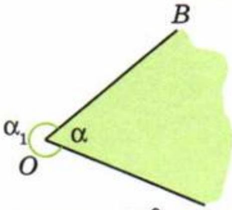
О Градусная мера плоского угла, содержащего полуплоскость, равна $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного плоского угла.



$\alpha_1 = 360° - \alpha$

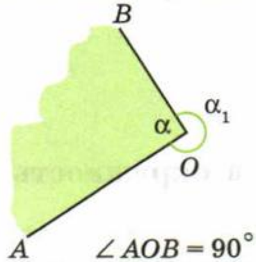
67

Найдите градусные меры плоских углов α и α_1.



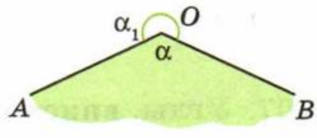
$\angle AOB = 62^\circ$

а)



$\angle AOB = 90^\circ$

б)



$\angle AOB = 130^\circ$

в)

Ответ. а) $\alpha =$ .... , $\alpha_1 =$ ....

б) $\alpha =$ .... , $\alpha_1 =$ .... ; в) $\alpha =$ .... , $\alpha_1 =$ ....

68

Найдите градусные меры дополнительных плоских углов α и α_1, если известно, что:

а) α на 120° меньше α_1;

б) α на 60° больше α_1;

в) α в 5 раз меньше α_1;

г) α в 9 раз больше α_1.

Решение.

а) Принимаем величину угла α за x°, тогда величина угла α_1 будет равна .... Так как сумма градусных мер дополнительных углов равна 360°, составим уравнение .... Решим его: ....

Находим градусные меры углов α и α_1: ....

....

б) ....

....

....

....

....

....

в) ....

....

....

г)

Ответ.

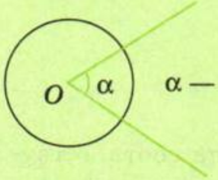
69

Градусные меры дополнительных плоских углов пропорциональны числам: а) 3 и 7; б) 7 и 11. Вычислите величины этих углов.

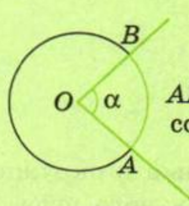
Решение.

Ответ.

О **Центральный угол** — это угол с вершиной в центре окружности.



α — центральный угол



AB — дуга окружности, соответствующая углу α

О **Дуга окружности, соответствующая центральному углу,** — это часть окружности, расположенная внутри центрального угла.

О | **Градусная мера дуги окружности** — это градусная мера соответствующего центрального угла.

70

Начертите окружность и проведите два перпендикулярных друг другу ее диаметра AB и CD. Вычислите градусные меры дуг, на которые делят окружность точки A, B, C и D.

(Решите задачу устно.)

Ответ.

....

71

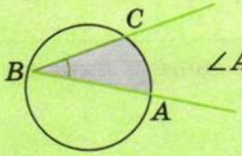
Начертите окружность и проведите ее радиусы OA, OB и OC так, чтобы углы AOB, BOC и COA были равны. Вычислите градусные меры образовавшихся дуг AB, BC и CA.

(Решите задачу устно.)

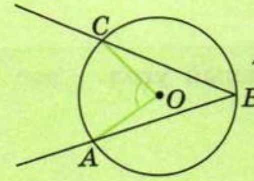
Ответ.

....

О | **Угол, вписанный в окружность,** — это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее.



$\angle ABC$ — вписанный в окружность



$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

О | Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла. (Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры соответствующего центрального угла или половине градусной меры дуги, на которую опирается вписанный угол.)

72

Начертите окружность и проведите ее радиусы OA, OB и OC так, чтобы $\angle AOB = 100°$, $\angle BOC = 120°$ и $\angle AOC = 140°$. Начертите треугольник ABC и вычислите градусные меры его углов.

Решение. ....

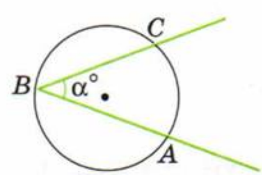
Ответ. ....

73

Начертите угол, градусная мера которого равна $2\alpha°$.

Ответ.

Искомый угол — ....

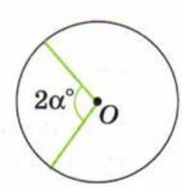


74

Начертите угол, градусная мера которого равна $\alpha°$.

Ответ.

Искомый угол — ....



75

Вписанный в окружность угол на $50°$ меньше соответствующего ему центрального угла. Вычислите градусные меры этих углов.

(Решите задачу устно.)

Ответ. ....

76

Вписанный в окружность угол ABC равен 30°.

а) Определите вид треугольника AOC (O — центр окружности).

б) Вычислите длину диаметра окружности, если $AC=8$ см.

Ответ.

а) ....

б) ....

77

Точки M, K и P делят окружность на дуги, градусные меры которых пропорциональны числам 3, 2 и 7 (считая от точки M к точке K). Вычислите градусные меры углов треугольника MKP.

Решение. Принимаем градусные меры дуг за $3x°$, $2x°$ и .... Так как сумма их градусных мер равна 360°, составим уравнение ....

Решим его и найдем градусные меры трех дуг: ....

....

Используя свойство вписанных углов, находим величины углов треугольника MKP: ....

Ответ. ....

78

Точки A, B, C делят окружность на дуги, градусные меры которых пропорциональны числам 1, 2, 3.

а) Вычислите градусные меры углов треугольника ABC.

б) Вычислите диаметр окружности, если меньшая сторона треугольника равна 12 см.

Решение.

а) ....

....

б) Воспользуемся соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

Ответ. а) ; б)

79

Около равнобедренного треугольника ABC описана окружность. Его основание AC стягивает дугу, градусная мера которой равна 140°. Вычислите градусные меры всех углов треугольника ABC.

Решение.

Ответ. ....

80

Около равнобедренного треугольника MPK описана окружность. Боковая сторона PK стягивает дугу, градусная мера которой равна 80°. Вычислите величины углов треугольника и градусную меру дуги, стягиваемой основанием MK.

Решение. ....

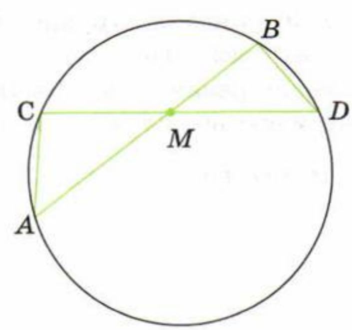
Ответ. ....

81

Хорды AB и CD пересекаются в точке M.

а) Запишите пары равных углов треугольников ACM и DBM.

б) Вычислите отношение периметров этих треугольников, если $AM : MD = 3 : 2$.



Решение:

а) Углы A и D данных треугольников являются вписанными и опираются на дугу ......, следовательно, они ....

Углы C и B ....

Углы AMC и DMB — .... Теперь можем утверждать, что треугольники .... (по ....

......................). Значит, отношение их периметров ....

....

Ответ. ....

82

Точки M и K делят окружность на дуги, градусные меры которых пропорциональны числам 11 и 9. Через точку M проведен диаметр MP. Вычислите градусные меры углов треугольника MKP.

Решение. Находим градусные меры дуг, концами которых являются точки M, K и P. ....

....

....

....

Вычисляем градусные меры углов треугольника MKP: ....

....

....

Ответ. ....

83

Дана окружность. Постройте ее центр, пользуясь чертежным треугольником (с прямым углом).

84

Начертите окружность и вписанный в нее угол. Постройте с помощью линейки:

а) угол, равный изображенному;

б) угол, градусная мера которого равна $180° - \alpha$, где α — величина изображенного угла.

85

Точки M, K, P и T делят окружность на дуги, градусные меры которых пропорциональны числам 2, 3, 1 и 4, считая от точки M к K. Вычислите градусные меры углов четырехугольника $MKPT$ и длину радиуса окружности, если $MP = 14$ см, $KT = 10$ см.

Решение.

Вычисляем градусные меры четырех дуг окружности:

....

....

....

....

....

Находим величины углов четырехугольника: ....

....

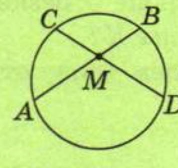
Так как углы .... — прямые, делаем вывод, что диагональ …… является …… . Следовательно,

радиус окружности равен ……

Ответ. ……

108. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

Т$_C$ Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то произведение отрезков одной хорды (AM и MB) равно произведению отрезков другой хорды (CM и MD).



$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

86

Дано: $MK = 4$ см, $CK = 6$ см, $KD = 5$ см.
Вычислите длину отрезка KP.

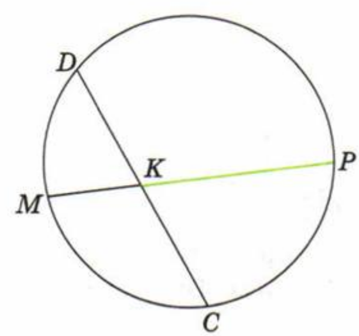
Решение.

Воспользуемся свойством отрезков пересекающихся хорд: ……

…… . Подставим в это равенство длины данных отрезков. Находим длину искомого отрезка: ……

……

Ответ. ……



87

Хорды AB и CD пересекаются в точке K. $AB = 13$ см, $AK = 8$ см, $CK = 10$ см. Найдите длину хорды CD.

Решение. $KB = AB - AK =$ ……

……

Теперь запишем равенство произведений отрезков хорд: ……
Подставим известные длины и найдем длину отрезка DK: ……

....

Находим длину всей хорды CD: ....

Ответ. ....

88

Хорды MP и KT пересекаются в точке E. $MP=16$ см, $ME=9$ см. Отрезок KE на 2 см больше отрезка TE. Вычислите длину хорды KT.

Решение. Найдем длину отрезка PE:

....

Принимаем длину отрезка KE за x см, тогда $ET=$ .... Составим и решим уравнение: ....

.... Получим $KE=$ .... ,

$ET=$ .... и $KT=$ ....

Ответ. ....

89

Хорды AB и CD пересекаются в точке M. $AM=9$ см, $MB=4$ см, $CM=MD$. Вычислите длину хорды CD.

Решение. ....

....

....

....

....

Ответ. ....

90

Хорды AB и CD пересекаются в точке P. $CD=22$ см, $AP=8$ см, $PB=9$ см. Вычислите CP и PD.

Решение. ....

....

Ответ. ....

91

Хорды MP и KT пересекаются в точке A. Вычислите длину хорды KT, если $MA = 6$ см, $MP = 15$ см, $KA : AT = 2 : 3$.

Решение. Принимаем длину KA за $2x$ см, тогда длина AT будет равна .... Составим и решим уравнение ....

Находим длину KT: ....

Ответ. ....

92

Хорда CD перпендикулярна диаметру AB и пересекает его в точке K. Вычислите длину хорды CD, если радиус окружности равен 10 см и $AK = 4$ см.

Решение. ....

Ответ. ....

§ 12 Решение треугольников

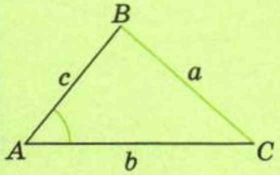
109. Теорема косинусов

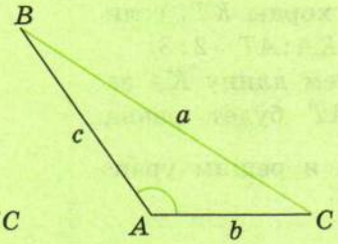
110. Теорема синусов

Т$_\text{С}$ Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$





93

В треугольнике ABC известно, что:

а) $b = 10$ см, $c = 9$ см, $\cos A = \frac{5}{9}$; б) $a = 7$ см, $c = 8$ см, $\cos B = \frac{2}{7}$;

в) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $\cos C = \frac{1}{3}$.

Вычислите длину третьей стороны данного треугольника.

Решение.

а) ....

б) ....

в) ....

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

94

а) Дан треугольник ABC. Запишите формулу для вычисления длины стороны AC.

б) Дан треугольник MKP. Запишите формулу для вычисления длины стороны KP.

в) Дан треугольник CDE. Запишите формулу для вычисления длины стороны CD.

Ответ.

а) $AC^2 =$ ....

$AC =$ ....

б) $KP^2 =$ ....

$KP =$ ....

в) $CD^2 =$ ....

$CD =$ ....

95

Вычислите длину неизвестной стороны треугольника ABC, если:

а) $AB = 8$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 60°$;

б) $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle C = 30°$;

в) $AC = 6$ см, $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$;

г) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 120°$.

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Решение.

а) ....

....

б) ....

....

в) ....

....

г) Сначала найдем значение cos .... $\cos 120° = \cos(180° - 60°) =$ $= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$. Теперь находим длину стороны AC. $AC^2 =$ ....

....

Ответ.

а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) ....

96

Стороны параллелограмма равны 10 см и 12 см. Его острый угол равен $60°$. Вычислите длину меньшей диагонали параллелограмма.

Решение. Обозначим параллелограмм $ABCD$, где угол A острый. Диагональ, лежащая против этого угла, является .... (т. е. искомой). Рассмотрим треугольник ABD. Найдем длину его стороны ......, пользуясь теоремой ....

....

....

Ответ. ....

97

Внешний угол при вершине M треугольника MKP равен $120°$, $MK = 3$ см, $MP = 8$ см. Вычислите периметр данного треугольника.

Решение. ....

....

....

....

....

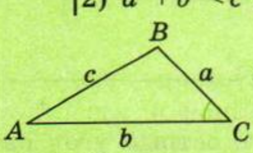
....

....

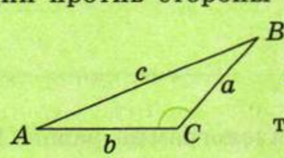
Ответ. ....

Тс Если в треугольнике, стороны которого равны a, b, c, выполнено условие:

1) $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, лежащий против стороны c, острый;
2) $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, лежащий против стороны c, тупой.



Если $a^2 + b^2 > c^2$, то $\angle C < 90°$



Если $a^2 + b^2 < c^2$, то $90° < \angle C < 180°$

98

Определите вид треугольника, стороны которого равны:

а) 2 см, 6 см и 7 см; б) 3 см, 5 см и 6 см;

в) 4 см, 5 см и 6 см; г) 15 см, 36 см и 39 см.

Решение.

а) Сравним квадрат большей стороны треугольника с суммой квадратов двух других сторон: $7^2 = \ldots\ldots$, $6^2 + 2^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$. Следовательно, $7^2 \ldots\ldots 6^2 + 2^2$. Значит, угол, который расположен против стороны, равной 7 см, тупой и данный треугольник ……………………

б) ………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

в) ………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

г) ………………………………………………………………

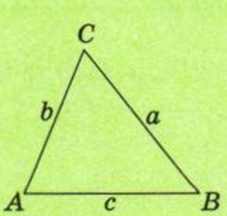
………………………………………………………………

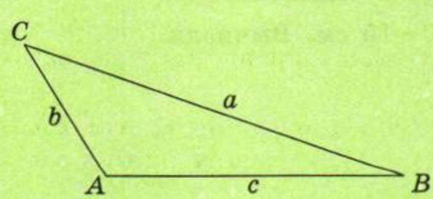
………………………………………………………………

Ответ. а) …………………… ; б) ……………………

в) …………………… ; г) ……………………

Тс Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.





$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

Тс Отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

99

В треугольнике MKP дано: $MK = \sqrt{6}$ см, $\angle P = 45°$, $\angle M = 60°$. Вычислите длину стороны KP.

Решение. Запишем пропорцию: $MK : \sin P = KP :$ .... Подставим в нее известные значения: .... : $\frac{\sqrt{2}}{2} = KP : \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдем длину стороны KP: $KP = \left(\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \frac{\sqrt{2}}{2} =$ ....

Ответ. ....

100

В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 60°$, $\sin B = \frac{1}{3}$, $BC = 6\sqrt{3}$. Найдите длину стороны AC.

Решение. Запишем пропорцию: $BC : \sin A = AC :$ .... Подставим в нее данные значения и найдем сторону AC:

....

....

....

Ответ. ....

101

В треугольнике ABC известно, что $\sin A = \frac{3}{4}$, $\sin B = \frac{1}{5}$, $BC = 15$ см. Вычислите длину стороны AC.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

102

В треугольнике CDE известно, что $\angle C = 30°$, $\angle D = 45°$, $DE = 2\sqrt{2}$. Вычислите:

а) сторону CE;

б) радиус окружности, описанной около данного треугольника.

Решение.

а) ....

....

....

б) Воспользуемся следствием из теоремы синусов $\left(\frac{a}{\sin A} = 2R\right)$.

Для данного треугольника имеем $\frac{DE}{\sin 30°} = 2R$, т. е. ....,

следовательно, $R =$ ....

Ответ. а) .... ; б) ....

103

В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 150°$, $\sin B = \frac{1}{3}$, $BC = 6$ см. Вычислите длину стороны AC.

Решение. Найдем значение $\sin A$:

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin$ .... = ...

Далее вычисляем длину AC: ....

....

....

....

....

Ответ. ....

104

В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$ см, $\angle A = 60°$, $BC = 4$ см. Вычислите синус угла C.

Решение. ....

....

....

....

....

....

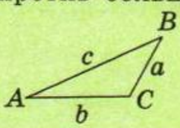
....

Ответ. ....

111. Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами

112. Решение треугольников

Тс В треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона, против большей стороны лежит больший угол.



Если $\angle C > \angle B > \angle A$, то $c > b > a$

Если $c > b > a$, то $\angle C > \angle B > \angle A$

105

В треугольнике ABC $\angle A = 57°$, $\angle C = 73°$. Расположите его стороны в порядке возрастания их длины.

Решение. Найдем величину третьего угла треугольника: $\angle B =$ .... Значит, наименьший угол в треугольнике — ...... , наибольший угол — .... Следовательно, стороны треугольника будут упорядочены так: ....

106

В треугольнике MKP $\angle K = 39°$, $\angle P = 21°$. Расположите его стороны в порядке возрастания их длины. (Решите задачу устно.)

Ответ. .... , ... , ...

107

В треугольнике CDE $\angle D = 45°$, $\angle C = 75°$, $CD = 9$ см.

а) Вычислите длину меньшей стороны данного треугольника.

б) Назовите бóльшую его сторону.

Решение.

а) Найдем величину третьего угла треугольника: $\angle E =$ ………………………… ………………………… . Следовательно, наименьшим углом является угол ……… , а искомой стороной — ……… . Вычислим ее длину, пользуясь теоремой …………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

б) Наибольшим углом треугольника является угол ……… . Следовательно, бóльшая его сторона — ………

Ответ. а) ………………………… ; б) ………

108

В треугольнике MKP $\angle M = 135°$, $\angle P = 30°$, $MK = 6\sqrt{2}$ см. Вычислите длину наибольшей стороны этого треугольника.

Решение. ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Ответ. …………………………

109

В треугольнике CDE $\angle C = 120°$, $CD = 8$ см, $DE = 8\sqrt{3}$ см. Найдите величины остальных углов данного треугольника.

Решение. Для нахождения угла E воспользуемся теоремой …

Составим пропорцию: …

Найдем значение $\sin 120° =$ …

… . Подставим в пропорцию данные значения и найдем $\sin E$.

$\sin E =$ …

…

Теперь можем утверждать, что $\angle E =$ … . В данном треугольнике угол E острый, так как треугольник содержит один тупой угол ($\angle C$), т. е. в данном случае второго значения угла E не существует. Находим величину угла D: $\angle D =$ …

Ответ. …

110

Боковая сторона равнобокой трапеции $ABCD$ равна $9\sqrt{2}$ см, ее диагональ AC равна $9\sqrt{3}$ см. Угол между диагональю и основанием трапеции равен 45°. Найдите величины углов этой трапеции.

Решение. Рассмотрим треугольник ACD. Для нахождения угла D воспользуемся теоремой … . Составим пропорцию: …

Найдем $\sin D$: …

Следовательно, $\angle D =$ … . (По рисунку считаем, что угол D острый.)

Далее находим остальные углы трапеции: …

…

…

…

…

…

Ответ. …

111

Внешний угол при вершине M треугольника MKP равен 120°. Стороны MK и MP равны соответственно 3 см и 8 см.

а) Найдите длину стороны KP.

б) Определите вид данного треугольника.

Решение.

а) Найдем величину угла M: ....

.... Теперь воспользуемся теоремой .... для вычисления длины стороны KP: ....

....

б) Наибольшей стороной в данном треугольнике является ....

Сравним квадрат этой стороны с суммой квадратов других сторон:

....

Следовательно, треугольник MKP ....

Ответ. а) .... ; б) ....

112

Угол AOB, образованный диагоналями параллелограмма $ABCD$, равен 45°. $AC = 18$ см, $BD = 12\sqrt{2}$ см.

а) Вычислите периметр параллелограмма.

б) Определите вид треугольника ABD.

Решение.

а) Рассмотрим треугольник AOB. Воспользуемся теоремой .... для вычисления длины стороны .... :

$AO =$ .... , $OB =$ .... (по свойству ....

...............................). Угол между этими сторонами равен ....

(по ....). $AB^2 =$ ....

.... Для вычисления стороны BC параллелограмма рассмотрим треугольник .... В нем $\angle BOC =$ ....

Еще раз используем теорему .... : $\cos\angle BOC =$ ....

.... , $BC^2 =$ ....

....

Находим периметр параллелограмма ....

б) В $\triangle ABD$ $AB =$ .... , $BD =$ .... , $AD =$ ....

Бóльшая сторона — .... Проводим сравнение: ....

....

Следовательно, треугольник ABD — ....

Ответ. а) ....

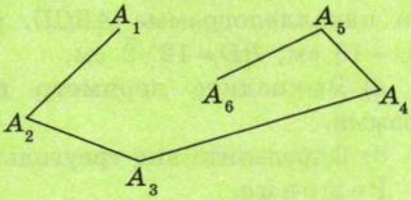
б) ....

§ 13 Многоугольники

113. Ломаная

114. Выпуклые многоугольники

О **Ломаная** — это фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n$.



$A_1A_2A_3A_4A_5 \ldots A_n$ — ломаная

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины ломаной

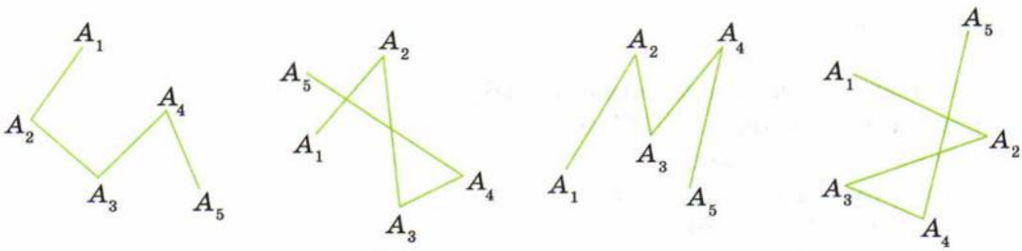
$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n$ — звенья ломаной

О **Простая ломаная** — это ломаная, которая не имеет самопересечений.

О **Замкнутая ломаная** — это ломаная, концы которой совпадают.

113

На каком из рисунков изображена простая ломаная?

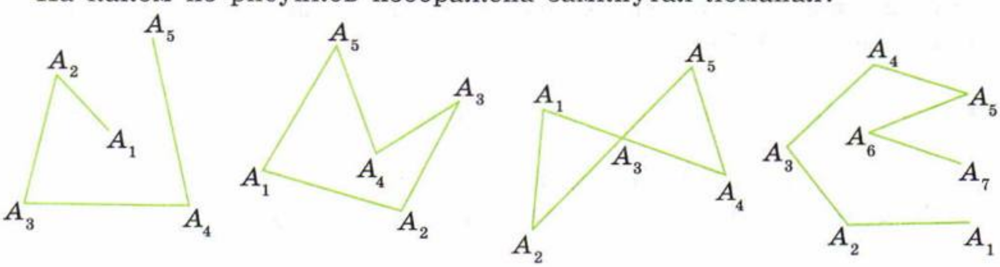


а) б) в) г)

Ответ. ....

114

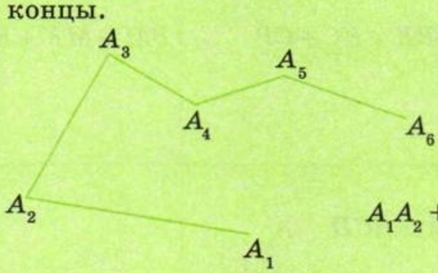
На каком из рисунков изображена замкнутая ломаная?



а) б) в) г)

Ответ. ....

Тс Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.



$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 \geqslant A_1A_6$$

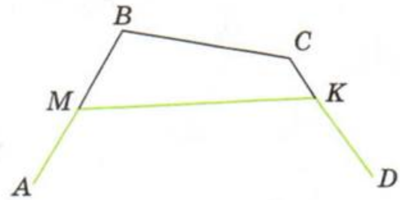
115

Длины звеньев ломаной $A_1A_2A_3A_4$ равны соответственно 3,2 см, 7,3 см, 4,8 см, 9,7 см. Может ли расстояние между ее концами A_1A_4 быть равным: а) 6,5 см; б) 29,5 см; в) 25 см? (Решите задачу устно.)

Ответ.

а) .... ; б) .... ; в) ....

116

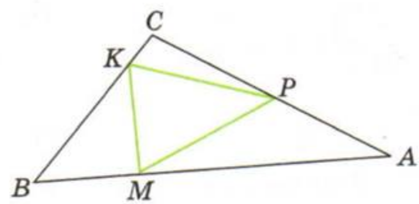


Докажите, что длина ломаной $ABCD$ больше длины ломаной $AMKD$.

Доказательство.

Запишем сумму длин всех звеньев ломаной $ABCD$, т. е. $AB+BC+CD$. Заметим, что $AB=AM+$ .... , $CD=CK+$ .... Рассмотрим ломаную $MBCK$. Ее длина $MB+BC+CK>MK$ (по теореме о длине ....). Теперь запишем длину ломаной $AMKD$, т. е. $AM+MK+KD$. Заменим в этой сумме MK на бо́льшую величину $MB+BC+CK$. Получим сумму $AM+MB+BC+CK+KD$, которая равна длине ломаной $ABCD$. Следовательно, длина ломаной $ABCD$ .... длины ломаной $AMKD$.

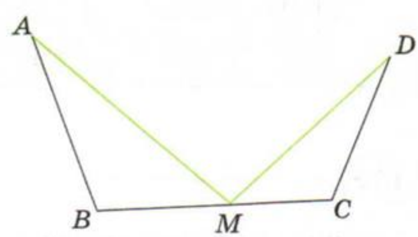
117



Докажите, что периметр треугольника ABC больше периметра треугольника MKP.

Доказательство. В треугольнике AMP $AM+AP$ ...... MP, в треугольнике MBK $MB+BK$ ...... MK, в треугольнике PKC .... Сложим левые и правые части этих трех неравенств: $AM+AP+MB+BK+KC+CP$ ...... $PM+MK+KP$, т. е. $AB+BC+CA$ ...... $MK+KP+PM$.

118



Докажите, что длина ломаной $ABCD$ больше длины ломаной AMD.

Доказательство. ....

....

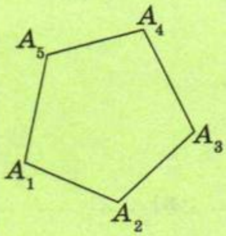
....

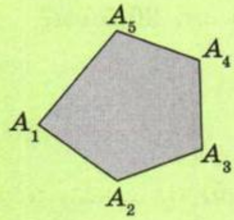
....

....

....

О **Многоугольник** — это простая замкнутая ломаная, соседние стороны которой не лежат на одной прямой.





$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ — вершины многоугольника

$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — стороны многоугольника

О **Плоский многоугольник** (многоугольная область) — это конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.

119

Начертите пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Проведите его диагонали A_1A_3 и A_1A_4. Сравните периметры данного пятиугольника и треугольника $A_1A_3A_4$. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

120

Начертите шестиугольник.

а) Сколько диагоналей можно провести из одной его вершины? Проведите их.

б) Сколько диагоналей можно провести через вершину, соседнюю с выбранной в пункте «а»? Есть ли среди этих групп диагоналей совпадающие?

в) Сколько всего различных диагоналей можно провести через вершины данного шестиугольника?

Ответ.

а) .... ; б) .... ; в) ....

121

1) Стороны выпуклого четырехугольника равны 2,2 см, 3,3 см, 4,1 см и x см. Чему равна длина неизвестной стороны, если известно, что x — целое число, большее 8? (Решите задачу устно.)

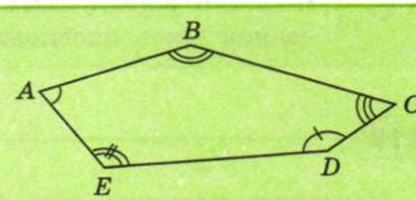
2) Существует ли четырехугольник, стороны которого равны:
а) 12,5 см, 38,5 см, 15,5 см, 20,5 см;
б) 12,5 см, 37,5 см, 15,5 см, 21,5 см;
в) 12,5 см, 43,5 см, 15,5 см, 20,5 см?
(Решите задачу устно.)
Ответ.

1) ....

2) а) .... ; б) .... ; в) ....

Tc | Сумма всех углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Tc | Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.



$\angle A, \angle B, \angle C$ ... — углы многоугольника

122

Вычислите сумму всех углов:
а) шестиугольника;
б) одиннадцатиугольника.
Решение.
а) По условию $n=6$. Воспользуемся для вычисления формулой суммы углов многоугольника: ....

б) ....

Ответ. а) .... ; б) ....

123

Сколько сторон имеет многоугольник, сумма углов которого равна сумме его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине? (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

124

Сколько сторон имеет многоугольник, сумма углов которого равна 1980°?

Решение. Запишем уравнение $180 \cdot (n-2) = 1980$. Решим его относительно n. $n-2=$ .... , ... , $n=$ ....

Ответ. ....

125

Начертите многоугольник, сумма всех углов которого равна 540°.

Решение.

1) Найдем число сторон этого многоугольника: ....

....

2) Начертим многоугольник с полученным числом сторон.

126

Существует ли многоугольник, сумма углов которого равна: а) 600°; б) 900°; в) 1680°; г) 3600°? (Решите задачу устно.)

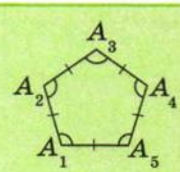
Ответ.

а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) ....

115. Правильные многоугольники

116. Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников

О **Правильный многоугольник** — это выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.



$A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный многоугольник

127

Начертите правильный треугольник ABC. Соедините отрезками середины его сторон (M, K, P).

а) Докажите, что треугольник MKP правильный.

б) Сколько треугольников образовалось на рисунке? Все ли они правильные?

Доказательство.

а) $MK = \frac{1}{2} AC$ (по свойству ....

....).

$KP =$.........., $MP =$.......... . Значит,

$MK = KP =$....... . Поэтому $\triangle MKP$

.... Но у такого

треугольника все углы .... Значит, $\triangle MKP$ ....

б) ....

....

128

Начертите правильный четырехугольник. Отметьте середины его сторон *(M, K, P, T)*. Соедините их последовательно отрезками. Является ли образовавшийся четырехугольник правильным? Если является, то докажите этот факт.

Доказательство.

....

....

....

....

....

....

129

Середины сторон правильного 10-угольника последовательно соединили отрезками. Верно ли, что при этом образовался правильный 10-угольник? Сравните длины сторон данного и нового многоугольников. Верно ли, что периметр нового многоугольника в два раза меньше периметра данного? (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

130

Сколько осей симметрии имеет правильный треугольник? Сколько у него центров симметрии?

(Решите задачу устно.)

Ответ. ....

....

131

Сколько осей симметрии имеет правильный четырехугольник? Сколько у него центров симметрии?

(Решите задачу устно.)

Ответ. ....

....

132

Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник, если:
а) n — нечетное число; б) n — четное число?
(Решите задачу устно.)

Ответ. а) .... ; б) ....

133

Вычислите величину угла правильного:
а) десятиугольника;
б) пятиугольника;
в) шестиугольника;
г) двенадцатиугольника.

Решение.

а) Вычислим сумму всех углов десятиугольника. Для этого воспользуемся соответствующей формулой .... Сумма равна .... Чтобы вычислить величину одного угла, разделим найденную сумму на 10 (так как все углы ....). Следовательно, величина одного угла равна ....

б) ....

....

в) ....

....

г) ....

....

Ответ. ....

134

Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: а) 108°, б) 150°, в) 140°?

Решение.

а) Угол правильного многоугольника равен сумме всех его углов (........................), деленной на число углов многоугольника (......). Составим уравнение $\frac{180(n-2)}{n}=108$. Решим это уравнение относительно n. $180(n-2)=180n$, ... , ... , $n=$......

б) ....

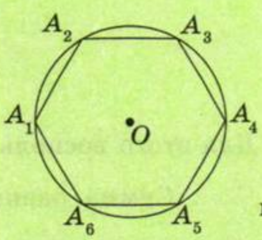
....

в) ....

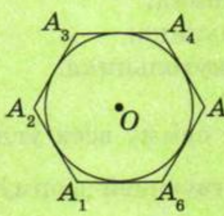
....

Ответ. ....

О **Многоугольник, вписанный в окружность,**— это многоугольник, все вершины которого лежат на некоторой окружности.



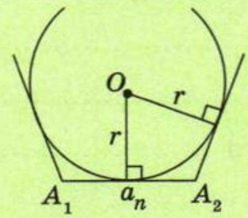
$A_1A_2 \dots A_n$— вписанный многоугольник



$A_1A_2 \dots A_n$— описанный многоугольник

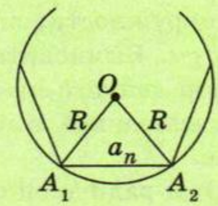
О **Многоугольник, описанный около окружности,**— это многоугольник, все стороны которого касаются некоторой окружности.

Т$_C$ Правильный многоугольник (выпуклый) является вписанным в окружность и описанным около окружности. (Эти окружности имеют один и тот же центр — центр правильного многоугольника.)



$$r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

n	3	4	6
R	$\frac{a_3}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_4}{\sqrt{2}}$	a_6
r	$\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a_4}{2}$	$\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$



$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

135

Периметр правильного треугольника равен 24 см. Вычислите:
а) радиус окружности, описанной около этого треугольника;
б) диаметр окружности, вписанной в него.

Решение.

а) Найдем длину стороны данного треугольника: $a_3 =$ ....
Теперь воспользуемся соответствующей формулой для вычисления R:
$R =$ ....

б) Вычислим радиус вписанной в данный треугольник окружности:
.... Найдем ее диаметр:
....

Ответ. а) .... ; б) ....

136

Периметр правильного четырехугольника равен 12 см. Вычислите:
а) радиус окружности, описанной около него;
б) диаметр окружности, вписанной в данный четырехугольник.

Решение. ....
....
....

....

....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

137

Диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен 18 см. Вычислите:

а) периметр данного шестиугольника;

б) радиус вписанной в него окружности.

Решение.

а) Вычислим радиус описанной окружности: $R=$ ....

Теперь найдем длину стороны шестиугольника (заметим, что $R=$ ......):

.... Далее вычисляем периметр шестиугольника:

....

б) ....

....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

138

Правильный треугольник вписан в окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр этого треугольника.

Решение. Запишем соответствующую формулу: $R=$ ....

Подставим в нее данное значение R и найдем a_3: ....

И наконец, вычислим периметр треугольника: ....

Ответ. ....

139

В окружность вписан правильный шестиугольник с периметром 18 см. Вычислите диаметр этой окружности.

Решение. Найдем длину стороны шестиугольника: $a_6=$ ....

Для нахождения радиуса .... окружности воспользуемся соответствующей формулой: .... Следовательно, диаметр окружности равен ....

Ответ. ....

140

Радиус окружности, вписанной в правильный четырехугольник, равен $2\sqrt{2}$ см. Вычислите:

а) его периметр;

б) диаметр окружности, описанной около четырехугольника.

Решение.

а) Длину стороны четырехугольника вычислим, пользуясь формулой $r=$ .... Находим a_4 и периметр четырехугольника:

....

б) ....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

141

Правильный четырехугольник со стороной 12 см описан около окружности, в которую вписан правильный треугольник. Вычислите периметр треугольника.

Решение. Вычислим радиус данной окружности. Она является .... в четырехугольник. Следовательно, ...

Далее вычисляем сторону треугольника, учитывая, что окружность является .... около него. Поэтому воспользуемся формулой $R=$ ....

Вычисляем периметр треугольника: ....

Ответ. ....

142

Правильный треугольник описан около окружности, в которую вписан правильный шестиугольник со стороной, равной 6 см. Вычислите периметр треугольника.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

117. Построение некоторых правильных многоугольников

143

Постройте с помощью циркуля и линейки правильный шестиугольник, сторона которого равна 2 см.

Построение. Строим окружность с радиусом 2 см. Отметим на ней произвольную точку A. Далее действуем по алгоритму, который описан в п. 117 учебника.

Ответ.

Искомая фигура — шестиугольник ....

144

а) Постройте с помощью циркуля и линейки правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса 2,5 см.

Построение. Построим окружность радиуса .... Отметим на ней произвольную точку A_1. Далее (как при построении шестиугольника) отмечаем точки A_2, ... Теперь проводим отрезки A_1A_3, A_3A_5 и A_5A_1.

б) Можно ли на этом рисунке построить еще один правильный треугольник, удовлетворяющий тем же условиям? Сколько таких треугольников можно вписать в одну окружность?

Ответ. а) Искомая фигура — треугольник .... ; б) ....

145

Начертите отрезок AB. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный треугольник, сторона которого равна данному отрезку AB.

Ответ. Искомая фигура — ....

146

Начертите окружность. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный четырехугольник, вписанный в эту окружность.

Построение. Проведем произвольный диаметр AB этой окружности. Построим к нему серединный перпендикуляр. Обозначим точки пересечения его с окружностью через C и D. Теперь проводим отрезки

....

Ответ. Искомая фигура — ....

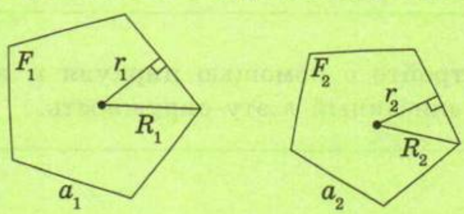
147

Постройте с помощью циркуля и линейки правильный четырехугольник, диагональ которого равна 3 см.

Ответ. Искомая фигура — ....

118. Подобие правильных выпуклых многоугольников

Тс Правильные выпуклые n-угольники подобны.



F_1, F_2 — подобные n-угольники

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Тс У правильных n-угольников отношения периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны.

148

Стороны правильных восьмиугольников равны 12 см и 8 см. Вычислите отношение:

а) периметров этих многоугольников;

б) радиусов окружностей, описанных около восьмиугольников;

в) радиусов окружностей, вписанных в данные многоугольники.

Решение.

а) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{12 \text{ см}}{8 \text{ см}} =$ .... ; б) $\frac{R_1}{R_2} =$ .... ; в) $\frac{r_1}{r_2} =$ ....

149

Длины сторон двух квадратов пропорциональны числам 5 и 6. Вычислите отношение:

а) периметров квадратов;

б) радиусов окружностей, вписанных в квадраты;

в) радиусов окружностей, описанных около данных квадратов. (Решите задачу устно.)

Ответ. а) $\frac{P_1}{P_2} =$ .... ; б) $\frac{r_1}{r_2} =$ .... ; в) $\frac{R_1}{R_2} =$ ....

150

Середины сторон правильного треугольника соединены отрезками. Вычислите отношение радиусов окружностей:

а) описанных около треугольников ABC и MPK;

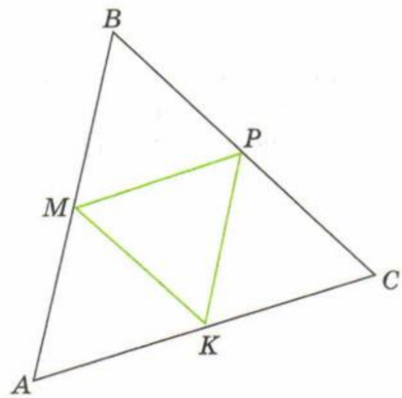
б) вписанных в треугольники ABC и MPK.

(Решите задачу устно.)

Ответ.

а) ....

б) ....



151

Радиусы окружностей, описанных около правильных пятиугольников, равны 15 см и 24 см.

Вычислите отношение:

а) периметров пятиугольников;

б) сторон этих пятиугольников;

в) радиусов окружностей, вписанных в эти пятиугольники.

(Решите задачу устно.)

Ответ.

а) ....

б) .... ; в) ....

152

Сумма сторон A_1A_2 и B_1B_2 двух правильных девятиугольников равна 24 см. Отношение радиусов вписанных в эти многоугольники окружностей равно $\frac{1}{5}$. Вычислите периметры девятиугольников.

Решение. Пусть сторона A_1A_2 равна x см. Тогда сторона второго девятиугольника равна .... см (по ....). Составим уравнение

.... , так как по условию сумма сторон равна ....

Решаем составленное уравнение: .... , $x=$ .... Следовательно, $A_1A_2=$ .... см, $B_1B_2=$ .... см. Вычисляем периметры данных девятиугольников: $P_1=$ .... см $=$ .... , $P_2=$ .... см $=$ ....

Ответ. $P_1=$ .... см, $P_2=$ .... см.

153

Около правильных семиугольников, длины сторон которых пропорциональны числам 5 и 4, описаны окружности. Радиус одной из них на 3 см больше радиуса другой. Вычислите длины диаметров данных окружностей.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

Ответ. $d_1=$ .... см, $d_2=$ .... см.

154

Радиусы окружностей, вписанных в два правильных десятиугольника, пропорциональны числам 2 и 5. Периметр одного из многоугольников на 30 см больше периметра другого. Вычислите периметры и длины сторон десятиугольников.

Решение. ....

....

....

....

....

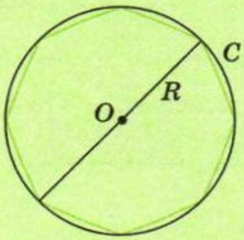
....

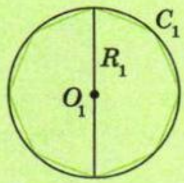
....

Ответ. $P_1=$ .... см, $P_2=$ .... см, $a_1=$ .... см, $a_2=$ .... см.

119. Длина окружности

Тс | Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности (оно одно и то же для любых двух окружностей). Отношение $\frac{C}{2R}$ обозначают π (пи), т. е. $\frac{C}{2R}=\pi$.





C — длина окружности

P_n — периметр многоугольника

$$\frac{C}{2R}=\frac{C_1}{2R_1}, \quad C\approx P_n$$

$$P_n \to C \text{ при } n\to\infty$$

$$C=2\pi R, \quad C=\pi D$$

$\pi\approx3{,}14$ — иррациональное число

155

Вычислите длину окружности, если:
а) радиус равен 10 см;
б) радиус равен 50 см;
в) диаметр равен 8 см;
г) диаметр равен 20 см.
(Решите задачу устно, взяв $\pi\approx3{,}1$.)
Ответ.

а) $C\approx$ .... см; б) $C\approx$ .... см; в) $C\approx$ .... см; г) $C\approx$ .... см.

156

Как изменится длина окружности, если:
а) увеличить ее радиус в 5 раз;
б) уменьшить ее радиус в 3 раза;
в) увеличить ее диаметр в 4 раза;
г) уменьшить ее диаметр в 6 раз?
(Решите задачу устно.)

Ответ. а) .... ; б) ....

в) .... ; г) ....

157

Как изменится длина окружности (считаем $\pi\approx3{,}1$), если:
а) увеличить ее радиус на 3 см;
б) уменьшить ее радиус на 2 см;

в) увеличить ее диаметр на 5 см;

г) уменьшить ее диаметр на 6 см?

Решение.

а) Обозначим радиус окружности R. Тогда длина ее равна $2\pi R$. Новый радиус равен $(R+3)$ см, ее длина равна $2\pi(R+3)$ см. Длина окружности увеличилась на $2\pi(R+3)-2\pi R=$ .... см.

б) ....

....

....

....

в) ....

....

....

....

г) ....

....

....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

в) .... ; г) ....

158

Сторона квадрата равна 12 см. Вычислите длину окружности:

а) вписанной в квадрат;

б) описанной около квадрата.

Решение.

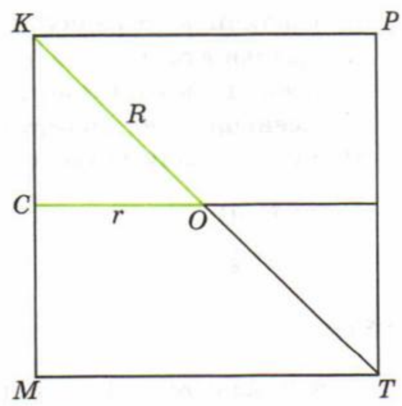
а) Диаметр окружности, вписанной в квадрат $MKPT$, равен ....

б) ....

....

....

Ответ. а) .... ; б) ....



159

Стороны правильного треугольника равны $6\sqrt{3}$ см. Вычислите длину окружности:

а) описанной около этого треугольника;

б) вписанной в данный треугольник.

Решение.

а) ....

....

б) ....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

160

Сторона правильного шестиугольника равна 12 см. Вычислите длину:

а) окружности, описанной около этого шестиугольника;

б) окружности, вписанной в данный шестиугольник.

Решение.

а) ....

....

б) ....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

161

Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольника, стороны которого равны:

а) 6 см и 8 см;

б) 2 см и $2\sqrt{3}$ см.

Решение.

а) Центром искомой окружности является ....

.... Значит, его диагональ равна диаметру окружности.

Вычислим длину диаметра: ....

....

б) ....

....

....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

162

Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны:

а) $2\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{6}$ см;

б) 4 см и $8\sqrt{2}$ см.

Решение.

а) ....

....

б) ....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

163

Вычислите длину окружности, описанной около треугольника, одна сторона которого равна m, а угол, лежащий против этой стороны, равен α, если:

а) $m = 10$ см и $\alpha = 30°$;

б) $m = 12\sqrt{2}$ см и $\alpha = 45°$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\frac{a}{\sin A} = 2R$, которая является следствием теоремы синусов. Вычислим длину диаметра описанной окружности:

.... Найдем длину этой окружности: ....

б) ....

....

....

Ответ. а) .... ; б) ....

164

Дан квадрат со стороной 6 см. На его сторонах, как на диаметрах, построены четыре полуокружности, расположенные вне данного квадрата. Вычислите сумму длин всех полуокружностей.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

165

Диагональ прямоугольника равна 20 см. Угол между диагоналями равен 60°. Вычислите длины дуг, на которые делят вершины прямоугольника описанную около него окружность.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

166

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 12 см. Вычислите длины дуг, на которые делят эту окружность вершины данного треугольника.

Решение. Вершины треугольника делят окружность на ....

равные части (так как треугольник ....). Значит, одна

дуга является .... частью окружности. Вычислим ее длину:

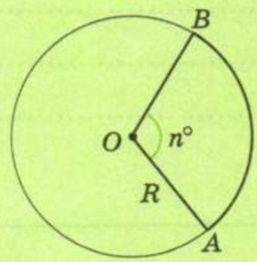
....

Ответ. ....

120. Радианная мера угла

Тс | Длина дуги окружности радиуса R, отвечающей центральному углу в $n°$, равна

$$l_{n°} = \frac{\pi R n}{180}.$$



$$l_{n°} = \frac{\pi R n}{180}$$

167

Около правильного пятиугольника $ABCDE$ описана окружность, радиус которой равен 18 см. Вычислите длину дуги, стягиваемой хордой: а) AB; б) AC.

Решение.

а) Вычислим градусную меру центрального угла AOB: ....

Следовательно, длина дуги, соответствующей этому углу, равна ....

....

б) ....

Ответ. а) .... ; б) ....

168

Угол, вписанный в окружность радиуса 9 см, равен 40°. Вычислите длину дуги, на которую он опирается.

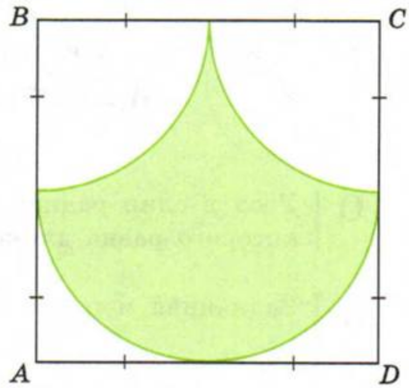
Решение. Центральный угол, соответствующий данному вписанному углу, равен .... Поэтому длина искомой дуги равна

....

Ответ. ....

169

$ABCD$ — квадрат. Его сторона равна 12 см. Вычислите длину границы закрашенной фигуры.



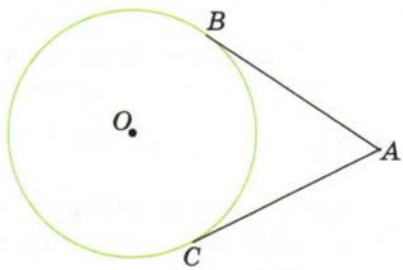
Решение. Радиусы окружностей, частями которых являются отдельные фрагменты границы данной фигуры, равны .... Градусные меры соответствующих центральных углов равны .... Теперь вычисляем длины дуг: ....

.... , а затем и длину всей границы данной фигуры: ....

Ответ. ....

170

К окружности радиуса 24 см проведены касательные AB и AC. Угол между ними равен 60°. Вычислите длины дуг, на которые делят точки B и C данную окружность.



Решение. Проведем радиусы окружности в точки C и B. Находим величины углов ABO, ACO: ....

.... (так как ....

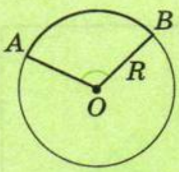
....).

Угол BAC равен .... (по ....). Сумма всех углов четырехугольника $ABCO$ равна .... Следовательно, угол BOC равен .... Теперь вычисляем длины искомых дуг: ....

Ответ. ....

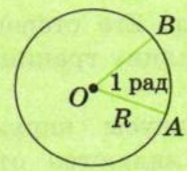
О | **Радианная мера угла — это отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.**

О | **Радиан — это единица радианной меры угла.**



l_{AB} — длина дуги AB,

$\angle AOB = \frac{l_{AB}}{R}$ радиан



$\angle AOB = 1$ радиан,

$l_{AB} = R$

О | **Угол в один радиан — это угол, длина соответствующей дуги которого равна длине радиуса.**

Т$_C$ | **Радианная мера угла получается из градусной умножением на $\frac{\pi}{180°}$.**

171

Запишите радианную меру угла с данной градусной мерой.

Градусная мера угла	180°	90°	45°	30°	60°
Радианная мера угла	π				

172

Вычислите радианную меру угла α, если: а) $\alpha = 15°$; б) $\alpha = 120°$; в) $\alpha = 150°$; г) $\alpha = 145°$; д) $\alpha = 20°$; е) $\alpha = 100°$.

Решение.

а) $\alpha = 15° \cdot \frac{\pi}{180°} =$ .... б) ....

в) .... г) ....

д) .... е) ....

173

Запишите градусную меру угла с данной радианной мерой.

Радианная мера угла	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
Градусная мера угла						

174

Найдите радианные меры углов треугольника, если они пропорциональны числам 3, 8 и 7.

Решение. ....

....

....

....

....

Ответ. ....

175

Вычислите радианные меры углов параллелограмма, если углы, прилежащие к одной его стороне, пропорциональны числам 2 и 5.

Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

176

Один из смежных углов на $\frac{\pi}{8}$ больше другого. Вычислите радианные меры этих углов.

Решение. ....

....

....

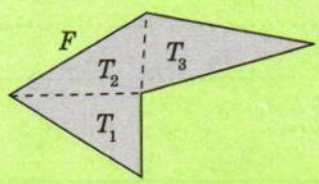
Ответ. ....

§ 14 Площади фигур

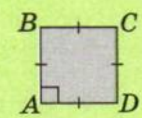
121. Понятие площади

О **Простая фигура** — это фигура, которую можно разбить на конечное число треугольников.

О **Площадь простой фигуры** — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:
1. Равные фигуры имеют равные площади.
2. Площадь фигуры, разбитой на простые фигуры, равна сумме площадей ее частей.
3. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.



F — простая фигура
F составлена из треугольников T_1, T_2, T_3
$S_F = S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3}$



$ABCD$ — квадрат
$AB = 1$ см
$S_{ABCD} = 1$ см^2

177

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена медиана BD. Площадь треугольника ABC равна 36 см^2. Вычислите площади треугольников ABD и BCD. (Решите задачу устно.)

Ответ. S_{ABD} = ... см^2, S_{BCD} = ... см^2.

178

Площадь ромба $ABCD$ равна 64 см^2. Его диагонали пересекаются в точке O. Вычислите площади треугольников ABC, ADO. (Решите задачу устно.)

Ответ. S_{ABC} = ... см^2, S_{ADO} = ... см^2.

179

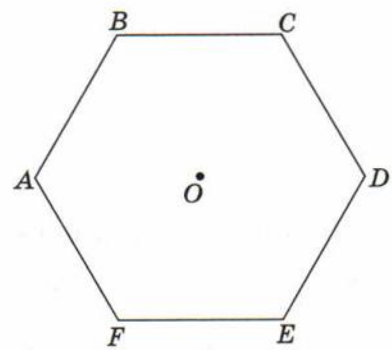
Площадь правильного пятиугольника равна 75 см². Через центр окружности, описанной около данного пятиугольника, проведены радиусы в вершины пятиугольника. Вычислите площадь каждого из образовавшихся треугольников. (Решите задачу устно.)

Ответ. $S =$ ...... см².

180

Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 96 см². O — центр окружности, описанной около него. Проведите ее радиусы во все вершины шестиугольника. Вычислите площадь:

а) треугольника COD;
б) параллелограмма $ABCO$;
в) трапеции $ADEF$;
г) прямоугольника $BCEF$.



Решение.

а) ....

б) ....

в) ....

г) ....

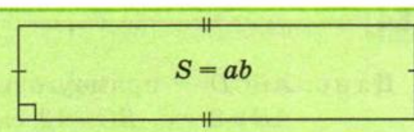
Ответ. а) $S_{COD} =$ ...... см²; б) .... = ... см²;

в) .... = ... см²; г) .... = ... см².

122. Площадь прямоугольника

Тс Площадь прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле

$$S = ab.$$



181

$ABCD$ — прямоугольник, стороны которого равны 10 см и 8 см. Вычислите:

а) площадь прямоугольника;

б) площади треугольников, на которые делит данный прямоугольник его диагональ.

(Решите задачу устно.)

Ответ. а) .... = ... см^2; б) .... = ... см^2.

182

Периметр прямоугольника равен 84 см, одна из его сторон на 6 см больше другой. Вычислите площадь прямоугольника.

Решение. ....

....

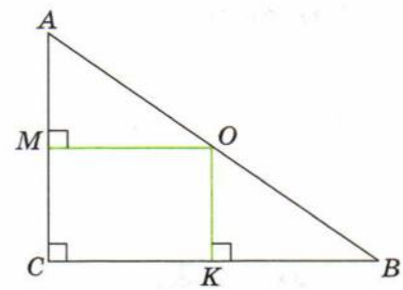
....

....

Ответ. Площадь прямоугольника равна ...... см^2.

183

Катеты прямоугольного треугольника равны 16 см и 12 см. Через середину гипотенузы проведены перпендикуляры к катетам треугольника. Вычислите площадь образовавшегося прямоугольника.



Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

184

Дано: $ABCD$ — прямоугольник,
$AB = 8$ см, $BC = 12$ см.
$MP \perp AD$, $NK \perp CD$.

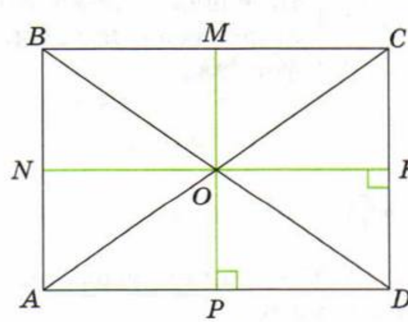
Вычислите площадь:

а) прямоугольника $ABCD$;

б) прямоугольника $MCKO$;

в) треугольника MOB;

г) треугольника AOD.



Решение.

а) ....

б) ....

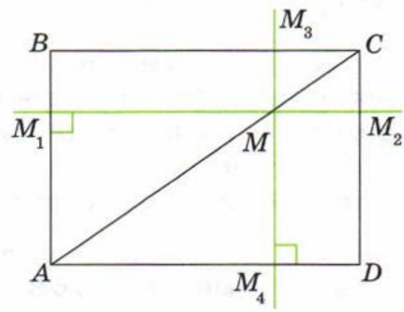
в) ....

г) ....

Ответ. а) ....; б) ....; в) ....; г) ....

185

Через точку M диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведены перпендикуляры к его сторонам. $AM:MC=3:1$, $AD=16$ см, $AB=12$ см.



Вычислите площадь:

а) прямоугольника $ABCD$;

б) прямоугольника MM_3CM_2;

в) прямоугольника AM_1MM_4;

г) треугольника AMM_4.

Решение.

а) Площадь прямоугольника $ABCD$ равна ....

б) В треугольнике ACD $AC=$ ....

(по теореме ....). Треугольники MCM_2 и ACD подобны (по двум углам: $\angle M_2=\angle$ ......; $\angle CMM_2=\angle$ ....). Следовательно, $CM_2:CD=CM:AC=$ ...., $MM_2:AD=CM:AC=$ .... Вычислим CM_2 и MM_2: ....

Площадь прямоугольника MM_3CM_2: ....

в) Вычислим площадь прямоугольника AM_1MM_4: ....

....

г) ....

Ответ. а) ....; б) ....; в) ....; г) ....

186

Площадь прямоугольника равна 54 см^2. Длины его сторон пропорциональны числам 3 и 2. Вычислите периметр прямоугольника.

Решение. Пусть длина меньшей стороны прямоугольника —

$2x$ см. Тогда длина большей стороны будет равна .... см. Воспользуемся формулой для вычисления площади прямоугольника и составим уравнение: .... Решим его: .... ,

$x=$....... . Следовательно, меньшая сторона прямоугольника равна: ....=....... см, большая его сторона равна: ....=....... см.

Теперь вычислим периметр прямоугольника: ....=....... см.

Ответ. ....

187

Площадь прямоугольника равна 42 см^2. Одна его сторона на 1 см больше другой. Вычислите площадь квадрата, периметр которого равен периметру данного прямоугольника.

Решение.

Вычислим длины сторон прямоугольника. Пусть меньшая его сторона равна ..... см, тогда большая сторона будет равна .... см. Учитывая условие, что площадь прямоугольника равна 42 см^2, составим и решим уравнение: .... , ... , ...

Значит, меньшая сторона прямоугольника равна .... , а большая — ..... см. Вычисляем периметр прямоугольника: ....

Поэтому сторона квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника, равна .... см, следовательно, площадь квадрата равна: ....

Ответ. ....

188

1) Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 см и 9 см. Его разделили на квадрат и прямоугольник. Вычислите площади и периметры полученных фигур.

2) Стороны прямоугольника равны 6,4 см и 10 см. Вычислите периметр квадрата, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

Решение.

1) ....

....

....

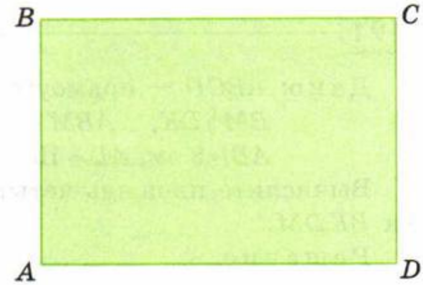
....

....

2) ....

....

....



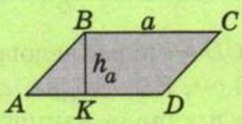
....

....

Ответ. ....

123. Площадь параллелограмма

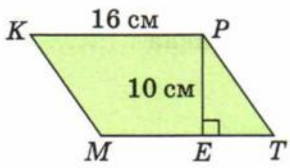
Тс | Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



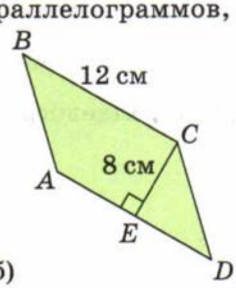
$S_{ABCD} = a \cdot h_a$

189

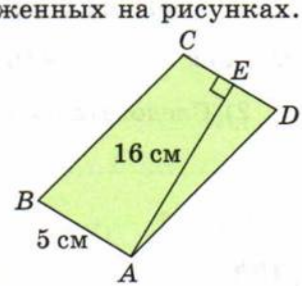
Вычислите площади параллелограммов, изображенных на рисунках.



а)



б)



в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

190

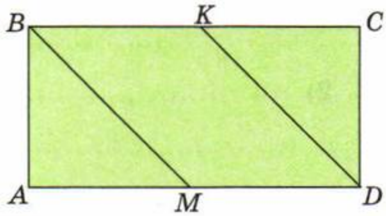
Меньшие стороны параллелограмма равны 8 см. Расстояние между ними равно 6 см. Вычислите площадь параллелограмма. (Сделайте чертеж и решите задачу устно.)

Ответ. ....

191

Дано: $ABCD$ — прямоугольник,
$BM \parallel DK$, $\angle ABM = 45°$,
$AB = 8$ см, $AD = 15$ см.

Вычислите площадь четырехугольника $BKDM$.



Решение. ....

....

....

....

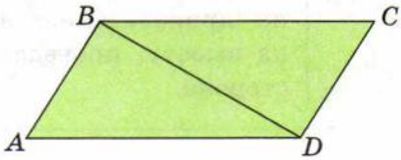
....

Ответ. ....

192

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AD = 20$ см, $BD = 16$ см, $\angle BDA = 30°$.

Вычислите площадь данного параллелограмма.



Решение.

1) Проведем высоту BK данного параллелограмма и рассмотрим треугольник BKD. Он .... , так как BK ..... AD. Вычислим длину BK: $BK =$ ....

2) Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна ....

....

Ответ. ....

193

Стороны параллелограмма равны 12 см и 18 см. Высота, проведенная к меньшей стороне, равна 9 см. Вычислите длину высоты, проведенной к большей стороне параллелограмма.

Решение.

1) Вычислим площадь параллелограмма: ....

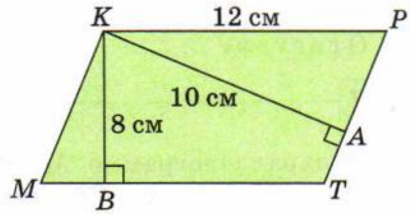
2) Вычислим длину искомой высоты. Запишем формулу для вычисления площади параллелограмма, которая содержит искомую высоту:

.... Получим уравнение .... , решим его: ....

Ответ. ....

194

Дано: $MKPT$ — параллелограмм.
Вычислите его периметр.
Решение.



....

....

....

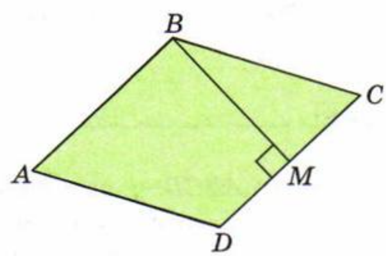
....

....

Ответ. ....

195

Дано: $ABCD$ — ромб,
$\angle BCD = 60°$, $BM = 12$ см.
Вычислите площадь ромба.
Решение.

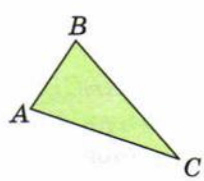


Рассмотрим треугольник BMC. Его гипотенуза BC равна .... Значит, площадь ромба $ABCD$ равна ....

Ответ. ....

196

Площадь треугольника ABC равна 36 см^2. Постройте фигуру, симметричную данному треугольнику относительно середины стороны BC.



а) Вычислите площадь образовавшегося четырехугольника.

б) Вычислите длину его высоты BK, если $AC = 9$ см.

Решение. ....

....

....

....

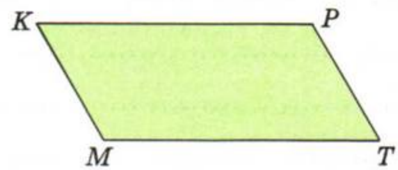
....

....

Ответ. а) ....; б) ....

197

В параллелограмме $MKPT$ $\angle KMT = 120°$, $MT = 20$ см, $PT = 12$ см. Вычислите площадь данного параллелограмма.



Решение. Проведем высоту MA данного параллелограмма к стороне KP.

Рассмотрим треугольник .... Найдем в нем длину стороны MA. $\angle KMA =$ ....

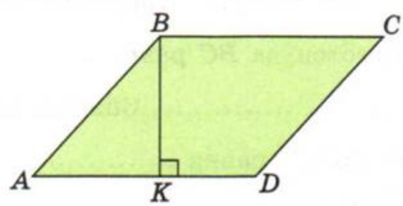
Значит, $MA =$ ....

Площадь параллелограмма равна ....

Ответ. ....

198

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AB = 10$ см, $AK = 8$ см, $KD = 6$ см. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$.



Решение. ....

....

....

Ответ. ....

199

Периметр ромба $ABCD$ равен 56 см. Его острый угол равен 30°. Вычислите площадь данного ромба.

Решение. ....

....

....

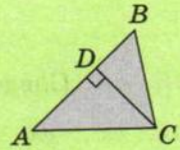
....

Ответ. ....

124. Площадь треугольника

125. Формула Герона для площади треугольника

Тс Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.

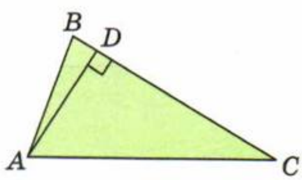


$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DC$

$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

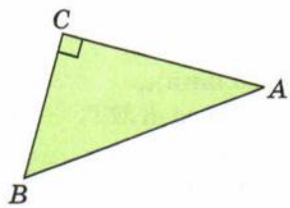
200

Вычислите площади треугольников. (Решите задачу устно.)



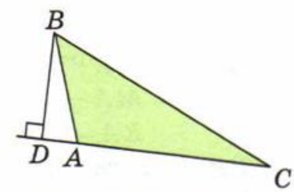
$BC = 14$ см, $AD = 5$ см

а)



$BC = 8$ см, $AC = 10$ см

б)



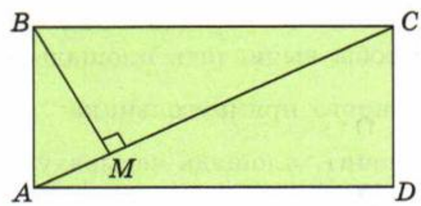
$AC = 18$ см, $BD = 4$ см

в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

201

Дано: $ABCD$ — прямоугольник,
$AC = 18$ см, $BM = 10$ см.
Вычислите площадь прямоугольника.



Решение. ....

....

....

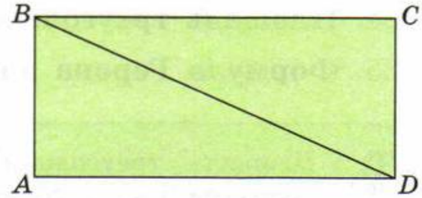
....

Ответ. ....

202

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $BD = 20$ см, $AD - AB = 4$ см.
Вычислите площадь треугольника BCD.
Решение. Пусть $AB = x$ см, тогда $AD =$ .... см. Треуголь-

ник ABD .... Можем составить уравнение ....



Решим его: ....

....

Получили $x=$ .... Следовательно,

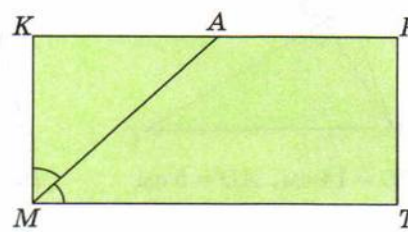
$AB=$ .... см, $AD=$ .... см. Теперь вычислим площадь треугольника BCD: ....

Ответ. ....

203

Дано: $MKPT$ — прямоугольник,
MA — биссектриса угла KMT,
$KA=6$ см, $AP=4$ см.

Вычислите площади треугольника MKA и четырехугольника $APTM$.



Решение. Углы AMT, MAK и KMA .... Следовательно, треугольник MKA .... Поэтому $KM=$ .... $=$ .... см. Вычисляем площадь треугольника KMA: ....

.... (так как этот треугольник ....).

Чтобы вычислить площадь четырехугольника $APTM$, найдем площадь данного прямоугольника: ....

Значит, площадь четырехугольника $APTM$ ....

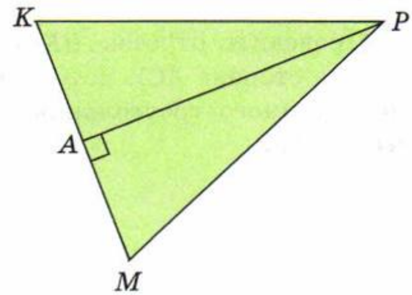
Ответ. ....

204

Основание MK равнобедренного треугольника MKP равно 10 см. Боковая сторона равна 13 см. Вычислите площадь треугольника и длину высоты, проведенной к его боковой стороне.

Решение. Проведем высоту PA и рассмотрим треугольник MPA. $MA=$ .... , $MP=$ .... Вычислим длину высоты PA: .... Теперь вычислим площадь треугольника MKP:

....



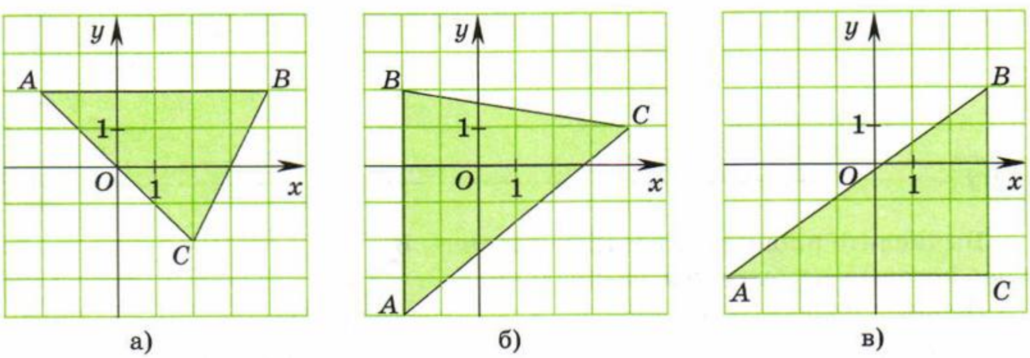
Проведем на чертеже высоту KB к стороне MP. Можем выразить площадь треугольника MKP через сторону MP и проведенную к ней высоту KB. Получим равенство ....

.... , из которого выразим KB. Получим $KB=$ ....

Ответ. ....

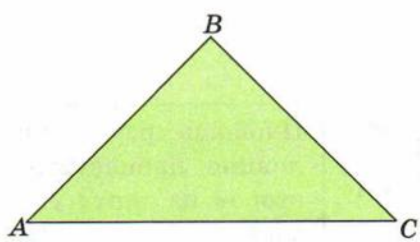
205

Вычислите площади треугольников, изображенных на рисунках. (Решите задачу устно.)



Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

206



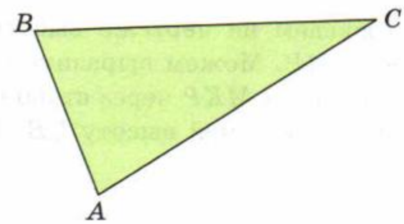
Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 18 см. Угол при его основании равен 45°. Вычислите площадь треугольника.

Решение. Проведем высоту BK к основанию AC. Рассмотрим треугольник ABK. $\angle BAK=$ .... , $\angle BKA=$ .... , следовательно, $\angle ABK=$ .... Поэтому $AK=$ .... = ... Теперь вычислим площадь данного треугольника ABC: ....

Ответ. ....

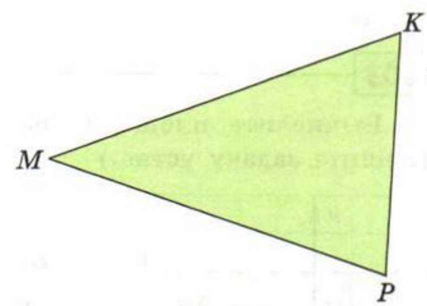
207

Проведите отрезок BK (точка K лежит на стороне AC), который делит площадь данного треугольника на две равные части.



208

Проведите отрезки KA и KB (точки A и B лежат на стороне MP), которые делят площадь данного треугольника на три равные части.



209

Вычислите площади трех треугольников, которые изображены на рисунке.

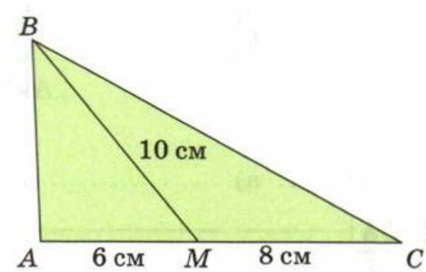
(Решите задачу устно.)

Ответ. ....

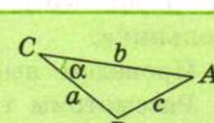
....

....

....



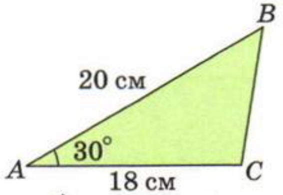
Тс Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



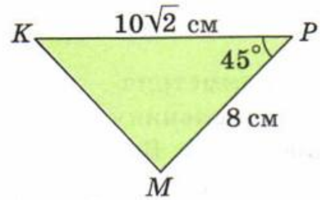
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

210

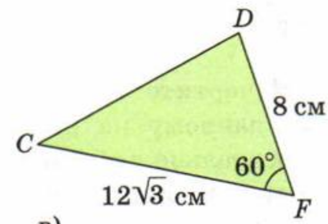
Вычислите площади треугольников, изображенных на рисунках. (Решите задачу устно.)



а)



б)



в)

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

211

Вычислите площадь правильного треугольника, сторона которого равна 18 см.

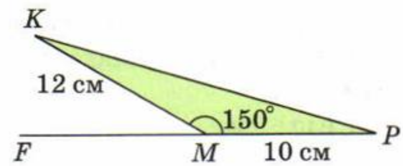
Решение. ....

....

Ответ. ....

212

Вычислите площадь треугольника MKP.



Решение. ....

....

....

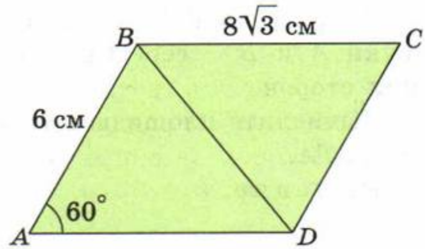
....

....

Ответ. ....

213

Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$.



Решение. ....

....

....

....

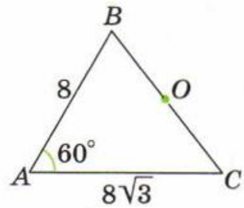
....

....

Ответ. ....

214

Начертите треугольник, симметричный данному на рисунке треугольнику относительно середины стороны BC. Вычислите площадь образовавшегося четырехугольника.



Решение. ....

....

....

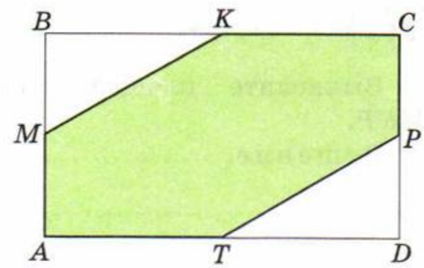
....

Ответ. ....

215

Дано: в прямоугольнике $ABCD$ $AB = 12$ см, $AD = 16$ см, точки M, K, P, T — середины соответствующих сторон.

Вычислите площадь многоугольника $MKCPTA$.



Решение. ....

....

....

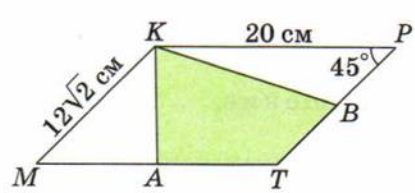
....

Ответ. ....

216

Дано: $MKPT$ — параллелограмм, точки A и B — середины соответствующих сторон.

Вычислите площадь четырехугольника $KBTA$.



Решение. ....

....

....

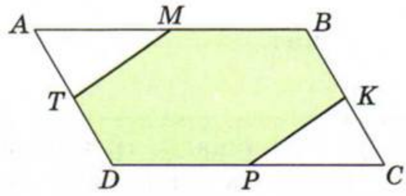
....

Ответ. ....

217

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A = 60°$, $BA = 20$ см, $CB = 10\sqrt{3}$ см, точки M, K, P и T — середины соответствующих сторон.

Вычислите площадь шестиугольника $MBKPDT$.



Решение. ....

....

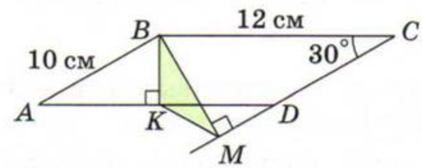
....

....

Ответ. ....

218

BK и BM — высоты параллелограмма $ABCD$. Вычислите площадь треугольника BMK.

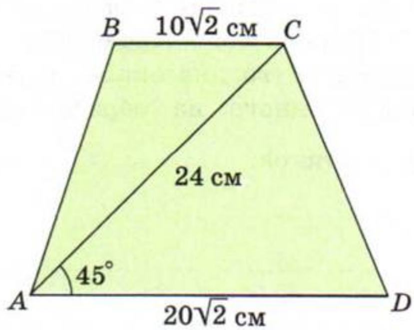


Решение. Рассмотрим треугольники ABK и BCM. Вычислим длины высот данного параллелограмма $ABCD$: $BM =$ .... , $BK =$ .... Найдем величину угла MBK: $\angle MBK = \angle ABC$ — .... Теперь можем вычислить площадь треугольника MBK: ....

Ответ. ....

219

$ABCD$ — трапеция. Вычислите ее площадь.



Решение. Площадь данной трапеции $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ACD. Вычислим их.

....

....

....

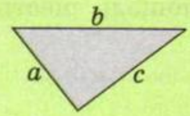
....

....

Ответ. ....

ТС | Площадь треугольника может быть вычислена по формуле Герона

$$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

220

Вычислите площадь треугольника, стороны которого равны 20 см, 13 см и 11 см. Вычислите длину его высоты, проведенной к большей стороне.

Решение. Вычислим полупериметр данного треугольника: $p=$ .... Подставим его в формулу Герона. Получим числовое выражение $S=\sqrt{22\cdot 9\cdot 11\cdot 2}$. Не станем сразу находить произведение, которое записано под корнем. Представим эти числа в виде произведения соответствующих множителей: $S=\sqrt{2\cdot 11\cdot 9\cdot 11\cdot 2}$. А теперь удобно извлечь корень: $S=11\cdot 2\cdot 3=$ .... Зная площадь треугольника, можем вычислить длину искомой высоты. Обозначим ее h. $66=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot h$, откуда $h=$ ....

Ответ. $S=$ .... ; $h=$ ....

221

Две стороны и диагональ параллелограмма равны 10 см, 9 см и 17 см. Вычислите площадь параллелограмма.

Решение. Начертим параллелограмм и его диагональ. Вычислим площадь одного из образовавшихся треугольников: ....

....

....

....

Затем вычислим площадь параллелограмма: ....

....

Ответ. ....

222

Периметр треугольника равен 42 см. Длины его сторон образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна 1. Вычислите площадь этого треугольника.

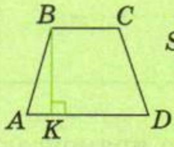
Решение. Обозначим длину меньшей стороны треугольника через .... Тогда две другие его стороны будут равны .... и .... Составим уравнение .... Решим его: .... Следовательно, стороны треугольника равны .... Теперь находим площадь треугольника: ....

....

Ответ. ....

126. Площадь трапеции

Тс Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

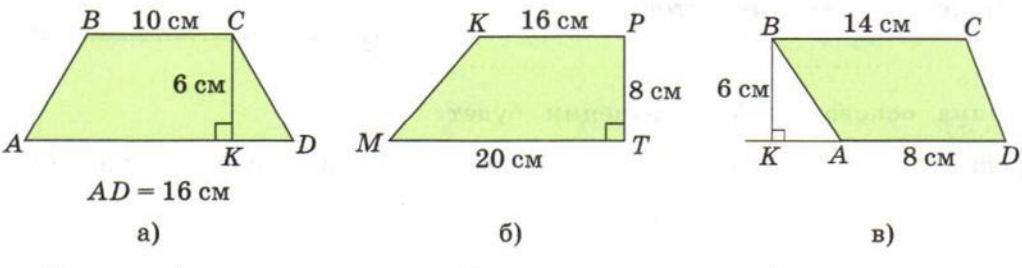


$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK$$

$$S = \frac{1}{2} h(a + b)$$

223

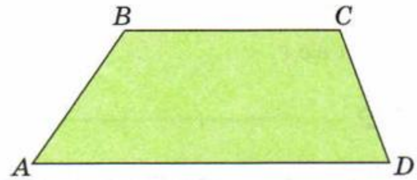
Вычислите площади данных трапеций. (Решите задачу устно.)



Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

224

Основания AD и BC трапеции равны 24 см и 18 см. Вершина B удалена от прямой AD на 10 см. Вычислите площадь трапеции.



Решение. Проведем высоту BK данной трапеции. Ее длина равна .... Следовательно, площадь трапеции будет равна ....

Ответ. ....

225

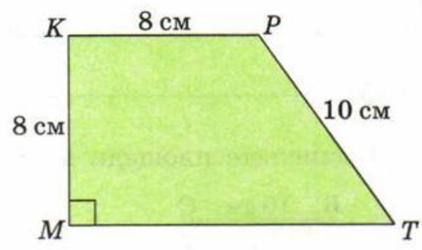
Средняя линия трапеции равна 22 см. Расстояние между ее основаниями равно 8 см. Вычислите площадь трапеции.

Решение. Средняя линия трапеции равна .... (по свойству ....). Высота трапеции равна расстоянию между .... (по свойству ....). Следовательно, площадь данной трапеции равна ....

Ответ. ....

226

Дано: $MKPT$ — прямоугольная трапеция. Вычислите ее площадь.



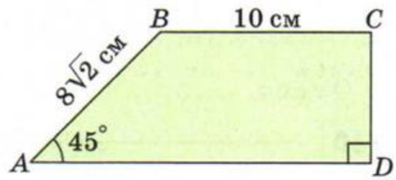
Решение. Проведем высоту PA трапеции и рассмотрим треугольник .... Вычислим длину его катета: ....

Длина основания MT трапеции будет равна .... Теперь вычислим площадь трапеции: ....

Ответ. ....

227

Дано: $ABCD$ — прямоугольная трапеция. Вычислите ее площадь.



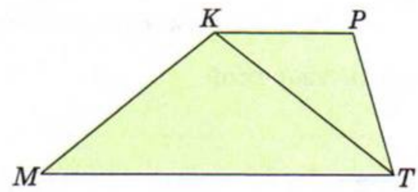
Решение. Проведем .... и рассмотрим прямоугольный треугольник .... Вычислим длины его катетов: .... Находим длину большего основания: ....

Вычисляем площадь трапеции: ....

Ответ. ....

228

Основания MT и KP трапеции $MKPT$ равны соответственно 14 дм и 6 дм. Площадь треугольника MKT равна 28 дм^2. Вычислите площадь данной трапеции.



Решение. ....

....

....

....

....

....

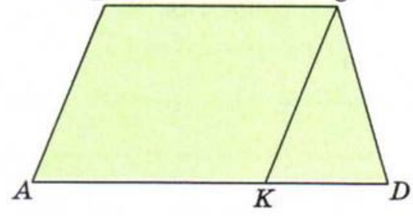
....

Ответ. ....

229

Дано: $ABCD$ — трапеция, $BC = 12$ см, $AD = 16$ см. $CK \parallel AB$, площадь четырехугольника $ABCK$ равна 96 см^2.

Вычислите площадь трапеции $ABCD$.



Решение. ....

....

....

....

....

Ответ. ....

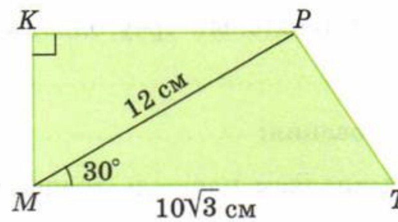
230

Дано: $MKPT$ — прямоугольная трапеция. Вычислите:

а) площадь трапеции;

б) ее периметр.

Решение.



а) ....

....

....

б) Рассмотрим треугольник MPT. Найдем длину стороны PT, пользуясь теоремой ....

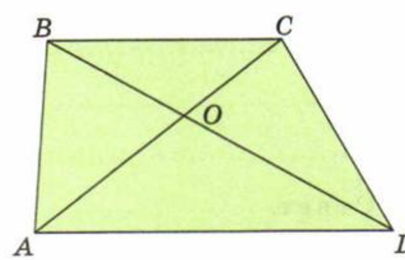
.... Теперь вычислим

периметр трапеции $MKPT$: ....

Ответ. а) .... ; б) ....

231

Основания трапеции равны 16 см и 12 см. Точка пересечения ее диагоналей удалена от оснований на 6 см и 4 см. Вычислите площадь трапеции.



Решение. ....

....

....

....

....

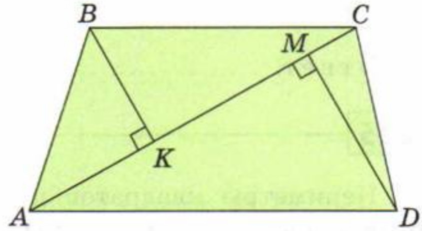
....

....

Ответ. ....

232

Площадь трапеции $ABCD$ равна 120 см^2. Диагональ AC равна 20 см. Расстояние от вершины D до этой диагонали в 2 раза больше, чем расстояние от вершины B до нее. Вычислите площади треугольников ABC и ACD.



Решение. ....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

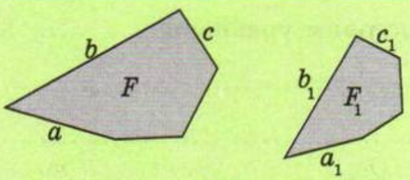
128. Площади подобных фигур

129. Площадь круга

Тс Площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров:

$$\frac{S_F}{S_{F_1}} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2} = \frac{P^2}{P_1^2};$$

$$\frac{S_F}{S_{F_1}} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{b}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 = \left(\frac{P}{P_1}\right)^2.$$



F и F_1 — подобные фигуры

233

Периметры подобных многоугольников равны 90 см и 60 см. Вычислите отношение площадей данных многоугольников.

Решение. $\frac{S}{S_1} = \left(\frac{P}{P_1}\right)^2$ ....

Ответ. ....

234

Медианы BD и B_1D_1 подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны 3 см и 4 см. Вычислите отношение площадей данных треугольников.

Решение. ....

....

Ответ. ....

235

Периметры квадратов пропорциональны числам 4 и 5. Вычислите отношение площадей данных квадратов.

Решение. ....

....

Ответ. ....

236

Длины сторон равносторонних треугольников пропорциональны числам 6 и 5. Площадь одного треугольника на 99 см^2 больше площади другого. Вычислите площади этих треугольников.

Решение. $\frac{S_1}{S_2}$ = ... = ... Принимаем площадь одного треугольника за x см^2, тогда площадь другого будет равна .... Составим уравнение .... Решим его: .... Находим площади треугольников: ....

Ответ. ....

237

Меньшие стороны подобных многоугольников равны 12 см и 15 см. Сумма площадей многоугольников равна 4100 см^2. Вычислите площади данных многоугольников.

Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

238

Середины сторон правильного треугольника соединены отрезками. Вычислите отношение площадей данного и образовавшегося треугольников.

Решение. Данный и образовавшийся треугольники подобны. Следовательно, отношение их площадей равно .... отношения их сторон. Пусть сторона данного треугольника равна a, тогда сторона второго треугольника будет равна .... Значит, отношение площадей будет равно

....

Ответ. ....

239

Середины сторон квадрата последовательно соединены отрезками. Вычислите отношение площадей данного и образовавшегося четырехугольников.

Решение. ....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

240

Центр O правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ соединен отрезками с вершинами. Вычислите отношение площадей данного шестиугольника и:

а) треугольника A_1OA_2;

б) шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5O$.

Решение. Обозначим сторону шестиугольника через a. Тогда длина радиуса окружности, описанной около шестиугольника, будет равна …… . Треугольник OA_1A_2 — …………………… . Его сторона равна ……

Вычислим его площадь: ……………………………………

Площадь данного шестиугольника будет равна ………………………

Площадь искомого шестиугольника равна ……………………………

Находим искомые отношения: а) …………………… ; б) ……………………

Ответ. а) …………………… ; б) ……………………

О | **Круг** — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.

$OX \leqslant R$ F — круг
$OY \leqslant R$ (O — центр)
$OA = R$
OA — радиус

241

Начертите круг, отметьте:

а) три точки, которые принадлежат этому кругу;

б) три точки, которые не принадлежат ему.

Ответ. а) ……………………………

б) ……………………………

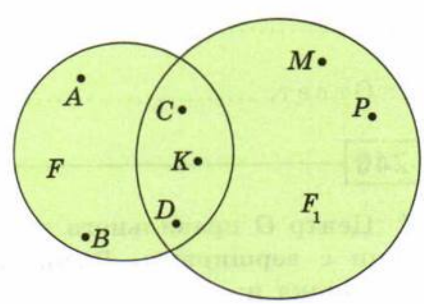
242

Перечислите все точки, отмеченные на рисунке, которые:

а) принадлежат кругу F;

б) принадлежат кругу F_1, но не принадлежат кругу F;

в) принадлежат кругам F и F_1.



Ответ. а) ……………………………

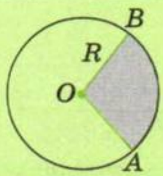
б) ……………………………

в) ……………………………

243

Начертите два круга, которые:
а) имеют только одну общую точку;
б) не имеют общих точек.

О **Круговой сектор** — это часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.



AOB — круговой сектор

244

Радиус кругового сектора равен 8 см. Его центральный угол равен 90°. Вычислите длину дуги сектора.

Решение. ....

....

....

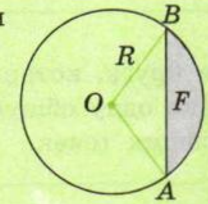
Ответ. ....

245

Дуга кругового сектора равна 60°. Вычислите ее длину, если радиус сектора равен 12 см. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

О | **Круговой сегмент** — это общая часть круга и полуплоскости.



F—круговой сегмент

246

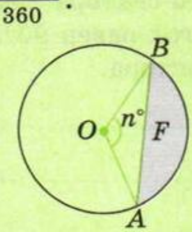
Начертите круг. Постройте с помощью линейки два равных сектора и два равных сегмента.

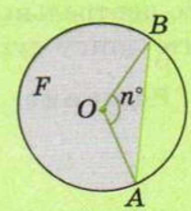
Тс | Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус.

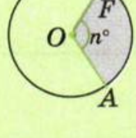
Тс | Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S_F = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360}.$$

$$S_F = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$







$$S_F = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

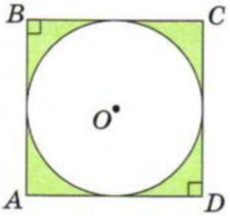
$$S_F = \frac{\pi R^2 n}{360} - S_{AOB} \qquad S_F = \frac{\pi R^2 n}{360} + S_{AOB}$$

О | Площадь кругового сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S_F = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360} \pm S_{AOB}.$$

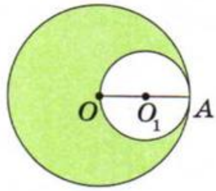
247

Вычислите площади закрашенных фигур.



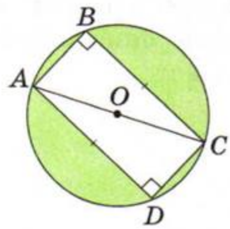
$AB = 8$ см

а)



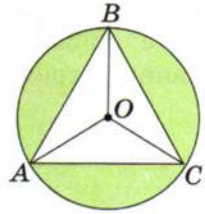
$OA = 6$ см

б)



$AB = 6$ см, $BC = 8$ см

в)



$AB = BC = AC$,
$AO = 9$ см

г)

Решение.

а) ....

б) ....

в) ....

г) ....

Ответ.

а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) ....

248

В круг, площадь которого равна 81π см^2, вписан прямоугольный треугольник. Найдите длину его гипотенузы.

Решение. ....

....

....

....

Ответ. ....

249

В круг вписан правильный шестиугольник, сторона которого равна 8 см. Вычислите площадь данного круга. (Решите задачу устно.)

Ответ. ....

250

Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен $6\sqrt{2}$ см. Вычислите площадь круга, описанного около данного треугольника.

Решение. ....

....

....

....

....

Ответ. ....

251

Прямоугольник со сторонами 4 см и $2\sqrt{5}$ см вписан в окружность. Вычислите:

а) длину окружности;

б) площадь ограниченного ею круга.

Решение. ....

....

....

....

....

....

....

Ответ. ....

252

Вычислите площадь сектора, составляющего:

а) четвертую часть круга радиуса 4 см;

б) третью часть круга радиуса 6 см;

в) двенадцатую часть круга радиуса 12 см.

Решение.

а) ....

б) ....

в) ....

Ответ. а) .... ; б) .... ; в) ....

253

Какую часть площади круга составляет площадь сектора, если его дуга равна: а) 60°; б) 30°; в) 120°; г) 90°; д) 45°? (Решите задачу устно.)

Ответ.

а) .... ; б) .... ; в) .... ; г) .... ; д) ....

254

Сторона правильного треугольника равна $6\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь круга, вписанного в этот треугольник.

Решение. Запишем формулу для радиуса окружности, вписанной в правильный треугольник: ....

Подставим в нее длину стороны треугольника и найдем радиус: ....

....

Ответ. ....

255

Высота правильного треугольника равна 9 см. Вычислите площадь круга, описанного около этого треугольника.

Решение. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, составляет .... его высоты. Значит, $R=$.................. . Вычисляем теперь площадь круга: ....

....

Ответ. ....

256

Площадь квадрата равна 64 см^2. Вычислите площадь описанного около него круга.

Решение. Вычислим длину стороны квадрата: .... Заметим, что .... квадрата является диаметром описанного круга. Вычислим ее длину: ....

Далее вычисляем искомую площадь круга: ....

Ответ. ....

257

Около правильного шестиугольника со стороной, равной 12 см, описан круг, а около круга — правильный треугольник. Вычислите площади круга и треугольника.

Решение. Сторона правильного шестиугольника .... радиусу

....

Значит, $S_{кр} =$ .... Зная радиус круга, вычислим сторону правильного треугольника, при этом учтем, что круг вписан в треугольник. Поэтому используем формулу $r =$ ....

Вычисляем a_3 и площадь треугольника: ....

....

....

Ответ. ....

Учебное издание

Дудницын Юрий Павлович

ГЕОМЕТРИЯ
Рабочая тетрадь
9 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *Е. В. Анненкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *М. В. Бакулиной*
Технический редактор *Е. А. Сиротинская*
Корректор *О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 01.02.12. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,59. Тираж 10 000 экз. Заказ № 32438.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

Учебно-методический комплект по геометрии для 7–9 классов:

СБОРНИК РАБОЧИХ ПРОГРАММ

7 — 9 классы

А. В. Погорелов

УЧЕБНИК

7 — 9 классы

В. А. Гусев, А. И. Медяник

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7, 8 и 9 классы

Ю. П. Дудницын

РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

7, 8 и 9 классы

Т. М. Мищенко

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ. ГИА

7, 8 и 9 классы

В. И. Жохов, Г. Д. Карташёва, Л. Б. Крайнева

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

7 — 9 классы

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

7 — 11 классы

ISBN 978-5-09-028663-3

9 785090 286633

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО